Aleksandras Krylovas, Rima Kriauzienė

MATEMATIKA

STUDIJUOJANTIEMS EKONOMIKĄ IR VERSLĄ

MYKOLO ROMERIO UNIVERSITETAS

MATEMATIKA STUDIJUOJANTIEMS EKONOMIKĄ IR VERSLĄ

MYKOLO ROMERIO
UNIVERSITETAS

ALEKSANDRAS KRYLOVAS
RIMA KRIAUZIENĖ

MATEMATIKA STUDIJUOJANTIEMS EKONOMIKĄ IR VERSLĄ

Vadovėlis

VALSTYBĖS ĮMONĖ
REGISTRŲ CENTRAS

Vilnius
2015

UDK 51(075.8)
Kr242

Rekomendavo spausdinti:

Mykolo Romerio universiteto
Ekonomikos ir finansų valdymo fakulteto Matematinio modeliavimo katedra
2015 m. birželio 5 d. (protokolo Nr. 1MMK-5)

Mykolo Romerio universiteto
Finansų apskaitos pirmosios pakopos studijų programos,
Finansų valdymo antrosios pakopos studijų programos komitetas
2015 m. birželio 8 d. (protokolo Nr. 10-380(1.17K-40101))

Mykolo Romerio universiteto
Verslo sistemų kūrimo ir valdymo pirmosios pakopos studijų programos,
Tarptautinės prekybos antrosios pakopos studijų programos komitetas
2015 m. birželio 9 d. (protokolo Nr. 10-381(1.17K-40101))

Mykolo Romerio universiteto
Finansų ekonomikos pirmosios pakopos studijų programos komitetas
2015 m. birželio 9 d. (protokolo Nr. 10-383(1.17K-40101))

Mykolo Romerio universiteto
Ekonomikos ir finansų valdymo fakulteto taryba
2015 m. birželio 18 d. (nutarimo Nr. 1EFV-18)

Mykolo Romerio universiteto
Mokslinių–mokomųjų leidinių aprobavimo leidybai komisija
2015 m. liepos 17 d. (protokolo Nr. 2L-12)

Recenzavo:

doc. dr. **Mečislavas Meilūnas**
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
Fundamentinių mokslų fakulteto Matematinio modeliavimo katedra

doc. dr. **Natalja Kosareva**
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
Fundamentinių mokslų fakulteto Matematinio modeliavimo katedra

ISBN 978-9955-30-177-6 (elektroninis)

ISBN 978-9955-30-176-9 (spausdintinis)

Turinys

Įvadas

Universitetų studentams dėstomų matematikos dalykų turinys priklauso nuo studijų krypties ir dažnai turi specifinių ypatumų. Tačiau visais atvejais dėstomos algebros ir matematinės analizės pagrindinės temos, sudarančios visų kitų matematinių disciplinų pamatus. Šias temas sujungiantys matematikos vadovėliai turi skirtingus pavadinimus – aukštoji matematika, tiesinė algebra ir analizinė geometrija, matematinė analizė, diferencialinis ir integralinis skaičiavimas, algebra ir analizė, ir kt. Nepaisant šių pavadinimų gausos, vadovėlių turinys labai panašus ir iš esmės susiformavo jau prieš porą šimtmečių. Kita vertus, matematikos vadovėliai skiriasi dėstymo stiliumi, pateikiamų pavyzdžių bei sprendžiamų uždavinių sunkumu, aiškinimo išsamumu arba atvirkščiai – trumpu, scheminiu aiškinimu.

Pastaraisiais dešimtmečiais matematinių tekstų autoriai gali daug laisviau naudoti matematines formules, o dar prieš du tris dešimtmečius išleistuose vadovėliuose paprastai pateikiama gerokai mažiau formulių ir daugiau ilgų žodinių aiškinimų, dėl to kartais jie mažiau patrauklūs studentams, negu šiuolaikiniai vadovėliai.

Kitas pastarųjų dešimtmečių matematikos dėstymo ypatumas – kompiuterinių sistemų, sprendžiančių visus aukštosios matematikos uždavinius ne tik skaitiniais metodais, bet ir tiksliai simboliniu pavidalu, plėtra. Tokios kompiuterinės algebros sistemos (*Maple*, *MatLab*, *Maxima* ir kt.) yra gana rimtas iššūkis matematikos dėstymo metodikai, nes praranda prasmę tradicinis mokymas atlikti gremėzdiškus pertvarkymus, pavyzdžiui, integruojant sudėtingus reiškinius. Tokiems veiksmams teisingai atlikti būtini labai stiprūs įgūdžiai, atsirandantys ilgą laiką sprendžiant daug uždavinių, o vertė šių įgūdžių sumenkėjo, nes kompiuterinės programos daro tai nepalyginti greičiau ir patikimiau už žmogų. Tai sudaro prielaidas daugiau dėmesio skirti kūrybiškiems matematikos studijų aspektams, sutrumpinti rutininiam darbui skiriamą laiką, nagrinėti taikomuosius uždavinius. Suprantama, kad tam reikia spręsti netrivialias didaktikos problemas ir šiuo metu sukaupta universitetų dėstytojų patirtis gana kukli. Siūlomo skaitytojui vadovėlio autoriai bando šiuolaikines informacines technologijas panaudoti, kaip papildomas mokymosi galimybes, pavyzdžiui, leidžiančias studentui efektyviai atlikti savarankiškus darbus kompiuteriu tikrinant, ar teisingai jis sprendžia uždavinius.

Vadovėlio autoriai stengėsi atsižvelgti į čia minėtas matematikos dėstymo tendencijas ir problemas, taip pat ir į tam tikrą specifiką, dėstant matematiką ekonomikos, vadybos ir kitų socialinių mokslų studentams. Jiems matematikos dėstoma mažiau, palyginti su inžinerinėmis specialybėmis, kartais tik vieną semestrą, per kurį reikia ne tik išdėstyti privalomus aukštosios matematikos pagrindus, bet ir supažindinti studentus su matematikos taikymu socialinių mokslų srityse. Vadovėlyje išdėstyti visi pagrindiniai tiesinės algebros ir matematinės analizės skyriai, taip pat nagrinėjamas matematikos taikymas ekonomikos ir socialinių mokslų dalykams: elastingumas, gamybinės funkcijos, matematinio programavimo pradmenys ir kt. Teorinių klausimų dėstymas gausiai iliustruojamas išsamiai nagrinėjamais pavyzdžiais, pateikta uždavinių studijų praktiniams užsiėmimams ir savarankiško darbo užduočių. Kiekvieno skyriaus pabaigoje yra testai žinioms pasitikrinti. Skaitytojui pravers išsami dalykinė rodyklė.

Vadovėlis skirtas MRU ekonomikos studijų programų studentams, tačiau autoriai tikisi, kad bus naudingas įvairioms socialinių mokslų programoms mokytis.

Autoriai

1 skyrius

Tiesinė algebra

1. Matricos ir determinantai

Raktiniai žodžai: Matricos sąvoka, savybės. Veiksmai su matricomis. Determinantas ir jo savybės. Atvirkštinė matrica. Ekonominės sistemos balanso lygtis.

Literatūra: [Apy01] 129–164 p.; [Pek05] 11–33 p.; [Rum76] X skyrius, 128–140 p.; [Būd08] 183–250 p.

1.1. Matricos sąvoka

Su matricomis susiduriame kiekvieną dieną ir daug metų, kol pradedame jas suvokti ir taikyti darbe.

Sudėtis	**Kiekis**
Cukrus	125 g
Kiaušiniai	5 vnt.
Miltai	125 g
Druska	1 arbat. š.

2015 m. vasaris						
P	A	T	K	Pn	Š	S
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

Matrica yra iš eilučių ir stulpelių sudaryta lentelė, kurios elementai yra skaičiai. Dabar užrašysime pateiktą informaciją matricos pavidalu:

Pirkinių sąrašas
Kiaušiniai 10 vnt.
Duona 1 kepalas
Pomidorai 5 vnt.
Sultys 2 pak.
Žuvis 1 kg

	Studentai	Dėstytojai
Fakultetas	100	50
Universitetas	1000	350

Matrica apskliaudžiama lenktais arba laužtiniais skliausteliais. Užrašykime pirkinių sąrašą ir antrąją lentelę matricos pavidalu:

$$\begin{array}{c|c|} & \text{Kiekis} \\ K & 10 \\ D & 1 \\ P & 5 \\ S & 2 \\ \check{Z} & 1 \end{array} \quad \text{ir} \quad \begin{array}{c|cc|} & S & D \\ F & 100 & 50 \\ U & 1000 & 350 \end{array} \quad \text{arba} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 1000 & 350 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ turime 5 eilutes ir vieną stulpelį ir sakome, kad tai yra 5×1 matrica arba **vektorius stulpelis**.

$\begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 1000 & 350 \end{pmatrix}$ turime 2 eilutes ir 2 stulpelius ir sakome, kad tai yra 2×2 **kvadratinė matrica**.

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ turime vieną eilutę ir 3 stulpelius ir sakome, kad tai yra 1×3 matrica arba **vektorius eilutė**.

- $m \times n$ matrica turi m eilučių ir n stulpelių.
- $m \times n$ nusako matricos eilę.

1.1.1 pavyzdys. Lina parduotuvėje nusipirko 2 duonos kepalus po 1 Eur, 2 litrus pieno po 0,63 Eur ir sviesto už 1,15 Eur. Sudarysime pirkinių ir kainų matricas.

Pirkinių matrica $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Kainų matrica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,63 \\ 1,15 \end{pmatrix}$.

Svarbu

Kai Lina nuėjo į kitą parduotuvę, kainos už tuos pačius produktus buvo: duona – 0,87 Eur, pienas – 0,6 Eur, o sviestas – 1,10 Eur. Tuomet kainų matrica atrodys taip:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0,87 \\ 0,63 & 0,60 \\ 1,15 & 1,10 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \textit{duona} \\ \leftarrow \textit{pienas} \\ \leftarrow \textit{sviestas} \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1\,\text{pard.} & 2\,\text{pard.} \end{array} & \end{array}$$

Iš skaičių sudaryta stačiakampė lentelė

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinama $m \times n$ matmenų matrica arba tiesiog **matrica.** Lentelėje surašyti skaičiai vadinami **matricos elementais** a_{ij}, indeksai i ir j reiškia eilutės numerį (i) ir stulpelio numerį (j).

Kai matricos A eilučių skaičius m lygus stulpelių skaičiui n (t. y. $m = n$), tai tokia matrica vadinama n-tosios eilės **kvadratine matrica**. Tokiu atveju turime

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elementai a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} sudaro matricos **pagrindinę įstrižainę**, o elementai a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1} sudaro matricos **šalutinę įstrižainę.**

Kvadratinė matrica, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai lygūs vienetui, o kiti – lygūs nuliui, vadinama **vienetine matrica** ir žymima raide E, t. y.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinama **nuline matrica** ir žymima raide O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica, gauta iš matricos A, sukeitus jos eilutes ir stulpelius vietomis, vadinama **transponuotąja matrica** ir žymima A^T.

Pavyzdžiui, jei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, tai $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.2. Veiksmai su matricomis

Nagrinėsime tokius veiksmus su matricomis:

- matricos daugyba iš skaičiaus,
- matricų sudėtis,
- matricų atimtis,
- matricų daugyba.

Matricos daugyba iš skaičiaus. Matricą A dauginant iš skaičiaus λ, kiekvienas jos elementas yra padauginamas iš to skaičiaus, t. y.

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pavyzdžiui, jei turime $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$, tai

$$\begin{aligned} \lambda \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 12 & 0 & 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matricų sudėtis ir atimtis. Sudedant (atimant) matricas, yra sudedami (atimami) jų atitinkami elementai. Sudėti ir atimti galime tik tokias matricas, kurios turi **vienodus matmenis** (t. y. vienodą skaičių eilučių ir vienodą skaičių stulpelių). Vienodus matmenis (su tais pačiais indeksais) turinčios matricos vadinamos **vienarūšėmis**.

Pavyzdžiui, pateiktos tokios matricos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matricos A ir B yra vienarūšės, nes jų matmenys yra vienodi, t. y. matrica A turi dvi eilutes ir tris stulpelius bei matrica B turi dvi eilutes ir tris stulpelius. Taigi šias matricas galime sudėti ir atimti:

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+2 & 3+6 & 2+(-4) \\ 4+3 & 0+2 & -5+(-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 7 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \\
A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1-2 & 3-6 & 2-(-4) \\ 4-3 & 0-2 & -5-(-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Beje, matricos $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ negali būti sudedamos (atimamos), nes jų matmenys skirtingi, t. y. matrica A turi 3 stulpelius ir 2 eilutes, o matrica B turi 2 stulpelius ir 2 eilutes.

Pastebėkime, kad $A - B = A + (-1) \cdot B$. Tai reiškia, kad atimties veiksmo atskirai galima ir neapibrėžti, nes pakanka matricų sudėties ir matricos daugybos iš skaičiaus veiksmų (operacijų).

1.2.1 pavyzdys. Atlikite veiksmus:

a) $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$,

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$,

$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4-3 & 8-0 \\ 12-6 & 20-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

b) $2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \right)$.

<u>Sprendimas</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 0+2 \\ -1+3 & 4+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Svarbu

Pastebėkime, kad $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$. Matematikoje ši savybė vadinama **distributyvumu**. Matricoms taip pat galioja sudėties **komutatyvumo** $A+B = B+A$ ir **asociatyvumo** $A+(B+C) = (A+B)+C$ savybės.

1.2.2 pavyzdys. Apskaičiuokite $A = 2B + 3C - D$, kai:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -4 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

<u>Sprendimas</u>

$$2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-4) & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$3C = 3\ \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$2B + 3C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+(-3) & 4+6 & (-4)+0 \\ (-4)+6 & 0+(-3) & 2+6 \\ 0+0 & (-8)+6 & 10+(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 10 & -4 \\ 2 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$2B + 3C - D = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -4 \\ 2 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 9 & -4 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-(-1) & 10-9 & -4-(-4) \\ 2-1 & -3-(-3) & 8-7 \\ 0-0 & -2-(-3) & 7-7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.2.3 pavyzdys. Apskaičiuokime matricą $\left(B + B^T\right)^T$, kai:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-2) & 5+(-5) \\ -2+2 & 3+3 & 4+(-4) \\ -5+5 & -4+4 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(B + B^T\right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

1.3. Matricų daugyba

Kad galėtume sudauginti dvi matricas A ir B, jos turi būti **suderintos**.

Matrica A vadinama **suderinta** su matrica B, kai matricos A stulpelių skaičius lygus matricos B eilučių skaičiui.

Kitaip tariant, dauginti galima matricas $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ ir $B = \|b_{ij}\|_{n\times k}$.

Svarbu

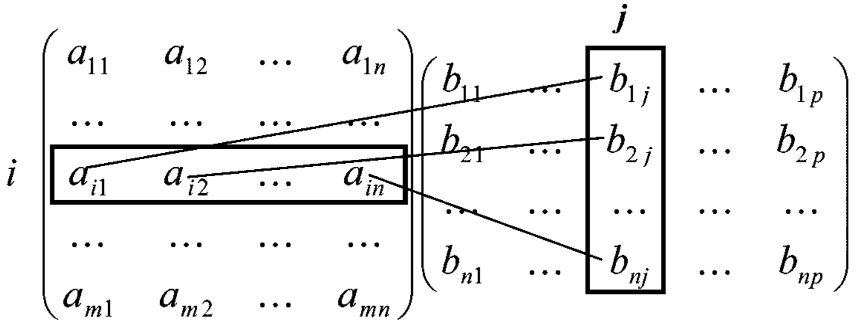
Pastebėkime: iš to, kad matrica A suderinta su matrica B, neišplaukia, kad matrica B suderinta su matrica A.

Pavyzdžiui, turime tokias matricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matrica A suderinta su matrica B, nes matricos A stulpelių skaičius (trys stulpeliai) lygus matricos B eilučių skaičiui (trys eilutės). Tačiau matrica B nėra suderinta su matrica A, nes matricos B stulpelių yra keturi, o matricos A eilučių yra dvi.

Matricų daugybą iliustruoja tokia schema:



1.3.1 pav.

> Matricos $A \cdot B$ elementas, esantis i-toje eilutėje ir j-ajame stulpelyje, randamas sudauginus matricos A i-tosios eilutės bei matricos B j-ojo stulpelio elementus ir sudėjus šias sandaugas:
>
> $$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Pavyzdžiui, turime tokias dvi matricas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Matrica A yra suderinta su matrica B. Tuomet

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matricos $A \cdot B$ eilučių skaičius sutaps su matricos A eilučių skaičiumi, o stulpelių – su matricos B stulpelių skaičiumi.
Pastebėkime, kad matrica B nėra suderinta su matrica A, nes matricos B stulpelių yra du, o matricos A eilučių – trys. Todėl sandauga $B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ yra negalima. Kitaip tariant, matrica $B \cdot A$ neegzistuoja.

Pavyzdžiui, sudauginsime matricas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Pirmiausia nustatome, ar sandauga $A \cdot B$ galima, t. y. ar matricos A ir B yra suderintos. Matricos A stulpelių skaičius (3 stulpeliai) sutampa su matricos B eilučių skaičiumi (3 eilutės). Vadinasi, sandauga $A \cdot B$ yra galima:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 5 & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 19 & 21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.3.1 pavyzdys. Apskaičiuokime matricų A ir B sandaugas AB ir BA, kai:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sprendimas

Kadangi matricos A ir B yra suderintos (matricos A stulpelių skaičius sutampa su matricos B eilučių skaičiumi), jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus $[3 \times 3]$.

$$\begin{aligned} & A \cdot B \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kadangi matricos B ir A tai pat yra suderintos (matricos B stulpelių skaičius sutampa su matricos A eilučių skaičiumi), jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus [3×3].

$$\begin{aligned} &B \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 5 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 5 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Atsakymas. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A^T$.

Sprendimas

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi matricos A ir B yra suderintos (matricos A stulpelių skaičius sutampa su matricos B eilučių skaičiumi), jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus [3×3].

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 + 5\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 0 & 4\cdot 0 + 5\cdot 1 \\ 2\cdot 4 + 0\cdot 5 & 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 4 + 1\cdot 5 & 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi matricos B ir A yra suderintos (matricos B stulpelių skaičius sutampa su matricos A eilučių skaičiumi), jas galima sudauginti. Gautosios matricos matmenys bus [2×2].

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 + 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 4\cdot 5 + 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 5\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 5\cdot 5 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 41 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}$.

Svarbu

Pastebėkime, kad $A \cdot B \neq B \cdot A$. Tai reiškia, kad bendruoju atveju matricų daugyba nėra komutatyvi operacija. Tai esminis skirtumas palyginti su skaičių daugyba, kuriai visada galioja $A \cdot B = B \cdot A$.

1.1 testas

1 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 16 \\ -15 & 18 \end{pmatrix}^T =$

① $\begin{pmatrix} -1 & 7 & -15 \\ 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$; ② $\begin{pmatrix} -1 & -15 \\ 7 & 16 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$;

③ $\begin{pmatrix} -15 & -1 \\ 16 & 7 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$; ④ $\begin{pmatrix} -1 & -15 & 7 \\ 16 & 0 & 18 \end{pmatrix}$.

2 $\begin{pmatrix} u & c \\ d & p \\ q & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

① $\begin{pmatrix} c & u & c \\ p & d & p \\ a & q & a \end{pmatrix}$; ② $\begin{pmatrix} u & c & u \\ d & p & d \\ q & a & q \end{pmatrix}$;

③ $\begin{pmatrix} u & c & u \\ q & d & q \\ a & q & a \end{pmatrix}$; ④ $\begin{pmatrix} u & a & u \\ q & c & q \\ u & q & a \end{pmatrix}$.

Tarkime, kad $G = \begin{pmatrix} -9 & -8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

3 Apskaičiuokite $5G + 2D$.

① $\begin{pmatrix} -47 & -24 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$; ② $\begin{pmatrix} -47 & -32 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$;

③ $\begin{pmatrix} -47 & 6 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$; ④ $\begin{pmatrix} -30 & -32 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$.

4 Apskaičiuokite $C = 5G \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2D \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

① $\begin{pmatrix} 47 & -49 \\ -6 & 42 \end{pmatrix}$; ② $\begin{pmatrix} -22 & -49 \\ -6 & 42 \end{pmatrix}$;

③ $\begin{pmatrix} 47 & -49 \\ -24 & 42 \end{pmatrix}$; ④ $\begin{pmatrix} 47 & -11 \\ -6 & 42 \end{pmatrix}$.

5 $\det C =$

① -1502 ; ② -2154 ; ③ 424 ; ④ 1680 ; ⑤ 2622 ; ⑥ 1056 .

1.4. Determinantas

Antrosios ir trečiosios eilės determinantai

Determinantas – tai skaitinė reikšmė, kuri pagal tam tikras taisykles priskiriama kvadratinei matricai. Determinantus žymėsime D, $|A|$, Δ arba $\det A$.

Determinantai skaičiuojami pagal tam tikras taisykles.

Antrosios eilės determinantas lygus pagrindinės ir šalutinės įstrižainių elementų sandaugų skirtumui:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

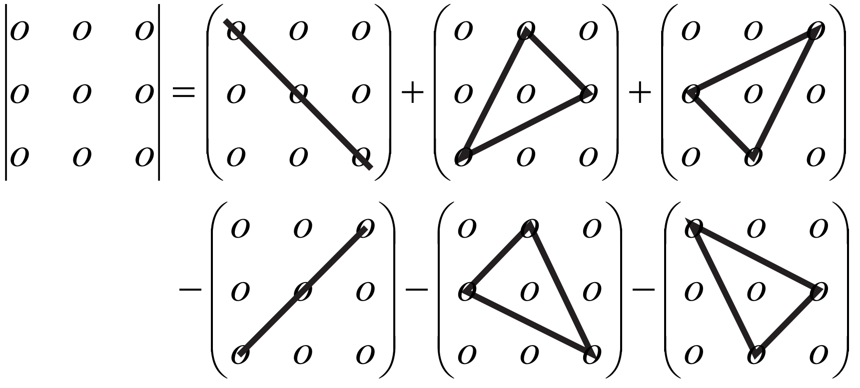
Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 = -5 - 12 = -17.$

Trečiosios eilės determinantas skaičiuojamas pagal trikampių taisyklę:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}.$$

Ši taisyklė lengviau įsimenama grafine forma:



1.4.1 pav.

Pavyzdžiui,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 4 + (-1)\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 0\cdot 0$$

$$= 6 + 0 + 0 - 12 + 4 - 0 = -2.$$

Išbraukę determinanto i-tąją eilutę ir j-ąjį stulpelį, kurių susikirtime yra elementas a_{ij}, gausime determinantą, kuris vadinamas elemento a_{ij} **minoru** ir žymimas M_{ij}.

Pavyzdžiui,

determinanto $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ elemento a_{21} minoras $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, elemento a_{22} minoras $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Determinanto elemento a_{ij} **adjunktu** vadinamas jo minoras M_{ij}, padaugintas iš daugiklio $(-1)^{i+j}$ ir žymimas A_{ij}, t. y.

$$A_{i\,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i\,j}.$$

Pavyzdžiui,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22}.$$

Pagrindinės determinanto savybės:

Determinantas nesikeičia, jeigu jo eilutes sukeičiame su stulpeliais, t. y. $|A| = \left|A^T\right|$.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

Jeigu determinantas turi nulinę eilutę (stulpelį), tai jis lygus nuliui.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Sukeitus dvi bet kurias determinanto eilutes (stulpelius) vietomis, determinanto ženklas pasikeičia.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

> Jeigu determinantas turi dvi lygias eilutes (stulpelius), tai jis lygus nuliui.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

> Jeigu determinanto eilutės (stulpeliai) yra proporcingos, tai toks determinantas lygus nuliui.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} -4 & 8 & -24 \\ 1 & -2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Čia proporcingos pirmoji ir antroji determinanto eilutės (t. y. pirmąją eilutę padalinę iš (-4), gauname tokius pačius elementus kaip ir antrojoje eilutėje).

> Jeigu kurios nors determinanto eilutės (stulpelio) elementai turi bendrą daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 12 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$ Čia iškėlėme daugiklį 2 iš pirmosios eilutės.

> Jeigu prie vienos determinanto eilutės (stulpelio) elementų pridėsime kitos eilutės (stulpelio) elementus, padaugintus iš bet kurio (to paties) skaičiaus, determinanto reikšmė nepakis.

Pavyzdžiui, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & -11 \end{vmatrix}.$ Čia pirmąją eilutę padauginome iš (-2) ir pridėjome prie trečiosios eilutės.

> Determinantas lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų ir juos atitinkančių adjunktų sandaugų sumai. Ši formulė vadinama determinanto *skleidiniu* eilutės (stulpelio) elementais (ši taisyklė yra vienas iš būdų apskaičiuoti aukštesnės eilės negu trečioji determinantams).

Pavyzdžiui,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$
$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Bendruoju atveju

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

esant visiems $i = 1, 2, \ldots, n$ ir $j = 1, 2, \ldots, n$. Pastebėkime, iš karto, kad, kai $i \neq k$, tai $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$, ir $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$, kai $j \neq k$, t. y. bet kurios eilutės (stulpelio) elementų, padaugintų iš kitos eilutės (stulpelio) adjunktų, suma lygi nuliui.

1.4.1 pavyzdys. Apskaičiuokime determinantus:

a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 8 - \frac{4}{3} \cdot 6 = 4 - 8 = -\,4.$$

Atsakymas. $-\,4$.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>

Sprendžiame pagal trikampių taisyklę:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1$$
$$- (-4) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 = 14.$$

Atsakymas. 14.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Sprendimas
Sprendžiame pagal trikampių taisyklę:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot A_{11} + 5A_{12} + 6A_{13} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + 6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 + 10 - 24 = -11.\end{aligned}$$

Atsakymas. -11.

Ketvirtosios eilės determinantas

Ketvirtosios eilės determinantas apskaičiuojamas, skleidžiant jį bet kuriuo stulpeliu arba bet kuria eilute, t. y. determinantas lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų ir juos atitinkančių adjunktų sandaugų sumai.

Skleidimas eilutėmis:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} = \\ &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24} \\ &= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34} \\ &= a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44}.\end{aligned}$$

Skleidimas stulpeliais:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41}$$

$$= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42}$$
$$= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43}$$
$$= a_{14} \cdot A_{14} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{34} \cdot A_{34} + a_{44} \cdot A_{44}.$$

1.4.2 pavyzdys. Apskaičiuokime 4-osios eilės determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

<u>Sprendimas</u>
Duotąjį determinantą skleisime 4-ąja eilute, nes joje yra du nuliniai elementai ir tokiu atveju bus mažiau skaičiavimo nei skleidžiant, pavyzdžiui, 1-ąja eilute.
Šiuo atveju formulė atrodys taip:

$$\det A = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}.$$

Tuomet nagrinėjamu atveju turėsime

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + 0 \cdot A_{44}$$

$$= 5 \cdot (-1)^{4+1} \cdot M_{41} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot M_{42}$$
$$= -5 \cdot M_{41} + M_{42}$$
$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -5 \cdot (-32) + (-58) = 102.$$

Taigi apskaičiavome duotąjį determinantą, skleisdami jį ketvirtąja eilute.

Atsakymas. 102.

Taikydami determinantų savybes, nagrinėjamą determinantą pakeičiame taip, kad visi kurios nors eilutės (stulpelio) elementai, išskyrus vieną, būtų lygūs nuliui.

b) $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$

<u>Sprendimas</u>
Pasirenkame antrąją eilutę (ją patogu imti, nes joje trečiasis elementas yra vienetas) ir šios eilutės elementus, nuosekliai padauginę iš (-2), (-6) ir (-2), pridėkime atitinkamai prie pirmosios, trečiosios ir ketvirtosios eilučių. Virš vieneto ir po juo gausime nulius ir gautą determinantą, skleisdami trečiuoju stulpeliu, turėsime:

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2\cdot 7 & -8-2\cdot 5 & 2-2\cdot 1 & 4-(-2)\cdot 2 \\ 7 & 5 & 1 & -2 \\ 4-6\cdot 7 & 3-6\cdot 5 & 6-6\cdot 1 & 4-6\cdot(-2) \\ -2-2\cdot 7 & 1-2\cdot 5 & 2-2\cdot 1 & 9-2\cdot(-2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -11 & -18 & 0 & 8 \\ 7 & 5 & 1 & -2 \\ -38 & -27 & 0 & 16 \\ -16 & -9 & 0 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 0\cdot A_{13} + 1\cdot A_{23} + 0\cdot A_{33} + 0\cdot A_{43} = A_{23}$$

$$= (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} -11 & -18 & 8 \\ -38 & -27 & 16 \\ -16 & -9 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -\ (-\ 2727) = 2727.$$

Atsakymas. 2727.

c) $\begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -7 & 6 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$

<u>Sprendimas</u>
Jeigu determinante nėra nė vieno elemento, lygaus vienetui, tai, pasinaudo-

dami determinantų savybėmis, kurį nors determinanto elementą pakeičiame vienetu. Tai leidžia išvengti veiksmų su trupmenomis!
Duotajame determinante trečiąją eilutę pridėdami prie ketvirtosios, elementą $a_{43} = -2$ pakeičiame vienetu:

$$\begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -7 & 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Dabar, pasinaudoję ketvirtojoje eilutėje esančiu vienetu, trečiajame stulpelyje virš vieneto esančius elementus pakeisime nuliais (analogiškai kaip b) pavyzdyje). Tam tikslui ketvirtąją eilutę padauginę iš (-3), (-9) bei 6 ir atitinkamai pridėję prie trečiosios, antrosios ir pirmosios eilučių, gausime

$$\begin{vmatrix} -9 & 7 & -6 & -4 \\ 5 & -8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -27 & 55 & 0 & 26 \\ 32 & -80 & 0 & -50 \\ 13 & -22 & 0 & -7 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Gautąjį determinantą skleisdami trečiuoju stulpeliu, suvedame į trečiosios eilės determinantą:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -27 & 55 & 0 & 26 \\ 32 & -80 & 0 & -50 \\ 13 & -22 & 0 & -7 \\ -3 & 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} \\ &= 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 1 \cdot A_{43} \\ &= 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot M_{43} = -\begin{vmatrix} -27 & 55 & 26 \\ 32 & -80 & -50 \\ 13 & -22 & -7 \end{vmatrix} \\ &= -\,(-114) = 114. \end{aligned}$$

Atsakymas. 114.

1.2 testas

$\boxed{1}$ $\begin{vmatrix} d & b \\ s & a \end{vmatrix} =$

① $sd - ab$; ② $da - sb$; ③ $sa - db$; ④ $db - sa$; ⑤ $sb - da$.

2 Apskaičiuokite $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix}$.

① 7; ② −9; ③ 10; ④ 8; ⑤ −2; ⑥ 14.

3 $\begin{vmatrix} p & z & y \\ 0 & v & t \\ 0 & d & u \end{vmatrix} =$

① $d(vt - pz)$; ② $p(td - vu)$; ③ $p(vu - td)$; ④ $d(uz - pt)$.

4 Matricos $\begin{pmatrix} -40 & -80 \\ -38 & 85 \end{pmatrix}$ minoras $M_{21} =$

① 40 ; ② −40 ; ③ 85 ; ④ 80 ;
⑤ 38 ; ⑥ −80 ; ⑦ −38 ; ⑧ −85 .

5 Matricos $\begin{pmatrix} 35 & 57 \\ -20 & -70 \end{pmatrix}$ adjunktas $A_{21} =$

① 35 ; ② −35 ; ③ −20 ; ④ 57 ;
⑤ −57 ; ⑥ 20 ; ⑦ 70 ; ⑧ −70 .

6 Matricos $\begin{pmatrix} c & t & q \\ v & d & b \\ x & f & y \end{pmatrix}$ adjunktas $A_{23} =$

① $cf - tx$;
② $cy - bt$;
③ $cy - bx$;
④ $tx - cf$.

7 Apskaičiuokite $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$.

① 5; ② −82; ③ 7; ④ 130; ⑤ 249; ⑥ 111.

$\boxed{8}$ Apskaičiuokite $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

① -21; ② 17; ③ 19; ④ -8; ⑤ -5; ⑥ -13.

1.5. Atvirkštinė matrica

n-tosios eilės kvadratinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vadinama **neišsigimusiąja**, kai $\det A \neq 0$. Priešingu atveju, t. y. kai $\det A = 0$, ji vadinama **išsigimusiąja.**

Matrica A^{-1} vadinama **matricos A atvirkštine matrica**, jei

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

čia E yra n-tosios eilės vienetinė matrica.

Svarbu

Kvadratinė matrica A turi atvirkštinę A^{-1} tik tada, kai $\det A \neq 0$, t. y. kai ji yra neišsigimusioji.

Atvirkštinę matricą galima rasti dviem būdais:

1. pagal formulę $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}^T$, kur $\tilde{A}^T$ – **transponuotoji adjunktų matrica** (dar vadinama **prijungtine** matricai A);

2. Gauso[1] metodu.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – vokiečių matematikas, fizikas.

<u>**I būdas.**</u> Jei A yra n-tosios eilės matrica, tai jos atvirkštinė matrica apskaičiuojama taip:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

čia A_{ij}, $i = 1, .., n$, $j = 1, ..., n$, yra matricos A elementų a_{ij} adjunktai, o matrica

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

yra transponuotoji adjunktų matrica (vadinama **prijungtine**). Reikia atkreipti dėmesį, kad pirmojoje jos eilutėje surašyti matricos A pirmojo stulpelio elementų adjunktai, antrojoje eilutėje – matricos A antrojo stulpelio elementų adjunktai ir t. t.

1.5.1 pavyzdys. Raskime matricos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą.

<u>Sprendimas</u>
Pirmiausia apskaičiuojame matricos determinantą

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0,$$

vadinasi, nagrinėjama matrica yra neišsigimusioji ir ji turi atvirkštinę matricą. Šiuo atveju formulė atrodo taip:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Dabar randame matricos adjunktus:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1.$$

Tuomet prijungtinė matrica atrodys taip:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gauname, kad

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{3}{7} & -\dfrac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Patikriname, ar $A \cdot A^{-1} = E$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{3}{7} & -\dfrac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} + \dfrac{6}{7} & \dfrac{2}{7} - \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7} & \dfrac{6}{7} + \dfrac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Taigi atvirkštinė matrica apskaičiuota teisingai.

Atsakymas. $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} & \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{3}{7} & -\dfrac{1}{7} \end{pmatrix}$.

1.5.2 pavyzdys. Raskime matricos $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą A^{-1}.

Sprendimas

Pirmiausia apskaičiuojame jos determinantą

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 9 + 8 + 12 - 24 - 5 = 2 \neq 0.$$

Taigi matrica yra neišsigimusioji ir ji turi atvirkštinę matricą. Šiuo atveju formulė atrodo taip:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Randame matricos adjunktus:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -\ (12 - 4) = -\ 8,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -\ 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -\ (8 - (-3)) = -11,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\ (5 - 8) = \ 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -\ (5 - (-9)) = -\ 14,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -\ 1.$$

Tuomet

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -11 & 32 & 3 \\ 5 & -14 & -1 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -11 & 32 & 3 \\ 5 & -14 & -1 \end{pmatrix}.$

II būdas. **Gauso** metodas schematiškai atrodo taip:

$$(A\,|\,E_n) \xrightarrow[\text{elementarieji pertvarkymai}]{} (\,E_n\,|\,A^{-1}\,).$$

Tarkim, $\det A \neq 0$. Jei prie matricos A iš dešinės pusės prirašysime n-tosios eilės vienetinę matricą E_n, t. y.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ir gautą matricą eilučių elementariaisiais pertvarkymais pakeisime matrica

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}\right),$$

tai gautoji matrica $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ bus matricos A atvirkštinė matrica A^{-1}.

Elementariaisiais pertvarkymais laikomi tokie veiksmai:
1) matricos eilutės daugyba iš skaičiaus, nelygaus nuliui;
2) matricos eilutės, padaugintos iš nelygaus nuliui skaičiaus, pridėjimas prie kitos matricos eilutės;
3) dviejų matricos eilučių sukeitimas vietomis.

1.5.1 pavyzdys. Raskite matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę matricą A^{-1} Gauso metodu:

<u>Sprendimas</u>

$$(A\,|E\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{2)}{\sim}$$

$$\overset{2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\overset{3)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)\overset{4)}{\sim}$$

$$\overset{4)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) = \left(E \,\middle|\, A^{-1}\right).$$

Čia buvo atlikti tokie veiksmai:
1) pirmoji ir trečioji eilutės sukeistos vietomis;
2) pirmoji eilutė padauginta iš (-3) ir pridėta prie antrosios eilutės;
3) pirmoji eilutė padauginta iš (-1) ir pridėta prie trečiosios eilutės;
4) antroji eilutė padauginta iš (-2) ir pridėta prie trečiosios eilutės.
Taigi gavome, kad

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1.5.2 pavyzdys. Raskite matricos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą A^{-1} Gauso metodu:

<u>Sprendimas</u>

$$(A\,|E\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{2)}{\sim}$$

$$\overset{2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{3)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right)\overset{4)}{\sim}$$

$$\overset{4)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right)\overset{5)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(E \middle| A^{-1}\right).$$

1) pirmoji eilutė padauginta iš 2 ir pridėta prie antrosios eilutės;
2) pirmoji eilutė padauginta iš (-6) ir pridėta prie trečiosios eilutės;
3) antroji eilutė padauginta iš (-2) ir pridėta prie trečiosios eilutės;
4) trečioji eilutė padauginta iš 2 ir pridėta prie antrosios;
5) trečioji eilutė padauginta iš (-1) ir pridėta prie pirmosios.
Taigi gavome

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -1 \\ -18 & -3 & 2 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -1 \\ -18 & -3 & 2 \\ -10 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.3 testas

1 Jei $bd - pw = 1$, tai $\begin{pmatrix} b & p \\ w & d \end{pmatrix}^{-1} =$

① $\begin{pmatrix} -b & -p \\ -w & -d \end{pmatrix}$; ② $\begin{pmatrix} d & p \\ w & b \end{pmatrix}$; ③ $\begin{pmatrix} d & w \\ p & b \end{pmatrix}$;
④ $\begin{pmatrix} d & -w \\ -p & b \end{pmatrix}$; ⑤ $\begin{pmatrix} d & -p \\ -w & b \end{pmatrix}$.

2 Matricos $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ determinantas yra lygus

① 43 ; ② 42 ; ③ -18 ; ④ 18 ; ⑤ 17 ; ⑥ -40 .

3 Adjunktas $A_{21} =$ ① -12 ; ② 4 ; ③ -1 ; ④ 6 .

4 Adjunktas $A_{32} =$ ① -6 ; ② 5 ; ③ -4 ; ④ -1 .

5 Adjunktas $A_{22} =$ ① -9 ; ② 8 ; ③ -2 ; ④ -5 .

$\boxed{6}$ Adjunktas $A_{13} =$ ① -8 ; ② 8 ; ③ -14 ; ④ -15 .

$\boxed{7}$ $A^{-1} =$

① $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; ② $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; ③ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{16} & \frac{7}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

1.6. Ekonominės sistemos balanso modelis

Tarkime, kad ekonominę sistemą sudaro dvi ūkio šakos ir kiekviena ūkio šaka gamina vienos rūšies produkciją. Pirmosios rūšies produkcijos vienetui pagaminti reikia sunaudoti a_{11} vienetų (dalių, $0 \leq a_{ij} \leq 1$) tos pačios šakos produkcijos ir a_{12} – kitos šakos produkcijos vienetų. Antrosios ūkio šakos produkcijos vienetui pagaminti atitinkamai sunaudojama a_{21} – pirmosios (kitos) ir a_{22} – antrosios (tos pačios) produkcijos vienetų. *Pavyzdžiui*, vienam automobiliui pagaminti reikia panaudoti tam tikrą energijos kiekį, o energetikos šakoje taip pat reikalingi automobiliai.

Skaičiai a_{ij} vadinami **technologiniais koeficientais**,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – sistemos **technologinė matrica**,

x_j - j-osios ūkio šakos gamyba.

Pažymėkime:
$s_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ – pirmosios ūkio šakos gamybos sąnaudos;
$s_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ – antrosios ūkio šakos gamybos sąnaudos.

Turi būti:
$x_1 \geq s_1(x_1, x_2), \quad x_2 \geq s_1(x_1, x_2)$ arba $X \geq AX$.
Tarkime, kad $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ – **paklausos vektorius**.

Ekonominės sistemos balanso lygtis

$$(E - A)\, X = C,$$

kai $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ – technologinė matrica, E – vienetinė matrica (n-tosios eilės), $X = (x_1, x_2, \ \ldots, x_n)^T$ – gamybos planas.

Gamybos planas $X = (x_1, x_2, \ \ldots, x_n)^T$ vadinamas **subalansuotu** (optimaliu), kai galioja pasiūlos ir paklausos balanso sąlyga

$$\begin{cases} X - AX = C, \\ X \geq 0. \end{cases}$$

Rašome $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, kai visi $x_j \geq 0$.

Jei galima rasti subalansuotą planą X, tai ekonominė sistema vadinama **produktyvia**.

Teorema. Ekonominė sistema yra produktyvi tada ir tik tada, kai

$$S = (E - A)^{-1} \geq 0,$$

t. y. visi šios matricos elementai yra neneigiami.
Matrica S yra vadinama **pilnųjų sąnaudų matrica**.

Uždavinio sprendimo algoritmas:

1. Randame vienetinės ir technologinės matricų skirtumą $E - A$.
2. Randame gautosios matricos atvirkštinę matricą $(E - A)^{-1}$.
3. Jeigu atvirkštinėje matricoje $(E - A)^{-1}$ nėra **nė vieno** neigiamo elemento, tai ekonominė sistema yra produktyvi. Galime rasti subalansuotą (optimalų) gamybos planą X, tenkinantį duotąją paklausą:
$$X = (E - A)^{-1}\, C.$$

1.6.1 pavyzdys. Duotoji ekonominės sistemos technologinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Koks turi būti gamybos planas $X = (x_1,\ x_2)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C = (66\ \ 99)^T$?

<u>Sprendimas</u>
1) Randame vienetinės ir technologinės matricos skirtumą $E - A$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,8 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

2) Randame gautosios matricos atvirkštinę matricą $(E - A)^{-1}$.

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,8 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,3 - 0,08 = 0,22,$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 0,6, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = 0,8, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = 0,1, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = 0,5, \end{aligned}$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,22} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} = \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

3) Visi gautosios matricos elementai teigiami, vadinasi, ekonominė sistema yra produktyvi. Galime rasti subalansuotą (optimalų) gamybos planą X, patenkinantį duotąją paklausą.
$X = (E - A)^{-1} C$, tai

$$\begin{aligned} X &= \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 66 \\ 99 \end{pmatrix} \\ &= \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 39,6 + 9,9 \\ 52,8 + 49,5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{100}{22} \cdot \begin{pmatrix} 49,5 \\ 102,3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 225 \\ 465 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Planas $X = (225,\ 465)^T$, t. y. $x_1 = 225$, $x_2 = 465$.

Atsakymas. pirmos rūšies produkcijos reikia pagaminti 225 vienetus, o antros rūšies – 465 vienetus.

1.6.2 pavyzdys. Duotoji ekonominės sistemos technologinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Patikrinkime, ar ši sistema produktyvi, jei taip, tai raskime gamybos planą $X = (x_1,\ x_2,\ \mathrm{x}_3)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C = (30\ \ 45\ \ 50)^T$.

Sprendimas

1) Randame vienetinės ir technologinės matricos skirtumą $E - A$.

$$\begin{aligned} E - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -0,7 \\ -0,6 & 0,8 & -0,5 \\ -0,7 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Randame gautosios matricos atvirkštinę matricą $(E - A)^{-1}$.

$$\begin{aligned} \det(E - A) &= \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & -0,7 \\ -0,6 & 0,8 & -0,5 \\ -0,7 & -1 & 0,5 \end{vmatrix} \\ &= 0,2 + 0 - 0,42 - 0,392 - 0 - 0,25 \\ &= -\ 0,862. \end{aligned}$$

Dabar randame matricos $E - A$ adjunktus:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,5 \\ -1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,4 - 0,5 = -\ 0,1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -0,7 \\ -1 & 0,5 \end{vmatrix} = -\ (0 - 0,7) = 0,7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -0,7 \\ 0,8 & -0,5 \end{vmatrix} = 0 + 0,56 = 0,56,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix}-0,6 & -0,5\\ -0,7 & 0,5\end{vmatrix}=-\ (-0,3-0,35)=0,65,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=\begin{vmatrix}0,5 & -0,7\\ -0,7 & 0,5\end{vmatrix}=0,25-0,49=-0,24,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-\begin{vmatrix}0,5 & -0,7\\ -0,6 & -0,5\end{vmatrix}=-\ (-0,25-0,42)=0,67,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}-0,6 & 0,8\\ -0,7 & -1\end{vmatrix}=0,6+0,56=1,16,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-\begin{vmatrix}0,5 & 0\\ -0,7 & -1\end{vmatrix}=-\ (-0,5-0)=0,5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix}0,5 & 0\\ -0,6 & 0,8\end{vmatrix}=0,4-0=0,4.$$

Atvirkštinė matrica

$$(E-A)^{-1}=-\frac{1}{0,862}\cdot\begin{pmatrix}-0,1 & 0,7 & 0,56\\ 0,65 & -0,24 & 0,67\\ 1,16 & 0,5 & 0,4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{0,862}\cdot\begin{pmatrix}0,1 & -0,7 & -0,56\\ -0,65 & 0,24 & -0,67\\ -1,16 & -0,5 & -0,4\end{pmatrix}.$$

Gauta matrica turi neigiamų elementų, vadinasi, ekonominė sistema yra neproduktyvi. Negalime rasti subalansuoto (optimalaus) gamybos plano X, patenkinančio duotąją paklausą.

Atsakymas. Ekonominė sistema neproduktyvi.

1.4 testas

$\boxed{1}$ Raskite tokias parametro ζ reikšmes, kad ekonominė sistema su technologine matrica $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \zeta\\ \zeta & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$ būtų produktyvi.

① $\zeta<-\frac{1}{4}\sqrt{7}$; ② $\zeta>\frac{1}{4}\sqrt{7}$; ③ $\zeta<-\frac{1}{4}$; ④ $-\frac{1}{4}\sqrt{7}<\zeta<\frac{1}{4}\sqrt{7}$; ⑤ $\zeta>\frac{1}{4}$;
⑥ $-\infty<\zeta<+\infty$; ⑦ $\emptyset$; ⑧ $0\leqslant\zeta<\frac{1}{4}$; ⑨ $-\frac{1}{4}<\zeta<\frac{1}{4}$; ⓪ $0\leqslant\zeta<\frac{1}{4}\sqrt{7}$.

1.7. Savarankiško darbo užduotys

1.1 užduotis

a) Atlikite veiksmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Apskaičiuokite matricą $A = \left(B + B^T\right)^T$, kai:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Apskaičiuokite $A + 2C$, kai:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

d) Apskaičiuokite:
a) $B - A$, **b)** $4A - 5B$, **c)** $3B - 2A$, **d)** $4A + 3B$, **e)** $7B - 3A$, kai:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -7 & 10 & 11 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.2 užduotis

Atlikite veiksmus:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, **f)** $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

g) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **h)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$.

1.3 užduotis

Duotos matricos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Apskaičiuokite: **a)** $AB + 2A$, **b)** $2B + AB$.

1.4 užduotis

Apskaičiuokite AB ir BA. Ar $AB = BA$?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

1.5 užduotis

Apskaičiuokite $f(A)$, jei:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 7E_2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - 7x - 4E_3$.

1.6 užduotis

Įrodykite, kad matrica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yra lygties $x^2-(a+d)\cdot x+(ad-bc)\cdot E_2 = 0$ sprendinys.

1.7 užduotis

Apskaičiuokite determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$, **c)** $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -16 & -4 & -1 \\ -13 & -1 & 2 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, **e)** $\begin{vmatrix} -10 & -3 & 1 \\ 22 & 3 & -4 \\ 12 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

1.8 užduotis

Išspręskite lygtis:

a) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 10 = 0.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 16 = 0.$

c) $\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

1.9 užduotis

Išspręskite nelygybes:

a) $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} \leq 0.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}.$

c) $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \leq 0.$

1.10 užduotis

Apskaičiuokite 4-osios eilės determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 4 \\ 5 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 7 & -8 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

1.11 užduotis

1. Raskite matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, **d)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **f)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.12 užduotis

Gauso metodu raskite matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.13 užduotis

a) Ekonominės sistemos technologinė matrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$. Koks turi būti gamybos planas $X = (x_1,\ x_2)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C = (50\ \ 100)^T$?

b) Ekonominės sistemos technologinė matrica $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,7 \\ 0,6 & 0,2 & 0,5 \\ 0,7 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}$.
Patikrinkite, ar ši sistema produktyvi, ir jei taip, tai raskite gamybos planą $X = (x_1,\ x_2,\ \mathrm{x}_3)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C = (30\ \ 45\ \ 50)^T$.

c) Ekonominės sistemos technologinė matrica yra A, o produkcijos paklausos vektorius yra C. Raskite subalansuotą gamybos planą (jei egzistuoja), kai:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 26 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$.

1.14 užduotis

Ar ekonominė sistema produktyvi, kai jos technologinė matrica A tokia:

a) $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}$.

1.15 užduotis

Duotoji ekonominės sistemos technologinė matrica $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.
Patikrinkite, ar ši sistema produktyvi, ir jei taip, tai raskite gamybos planą $X = (x_1,\ x_2,\ \mathrm{x}_3)^T$, kad būtų patenkinta paklausa $C = (10\ \ 15\ \ 5)^T$. Atvirkštinę matricą apskaičiuokite Gauso metodu.

2. Tiesinių lygčių sistemos

Raktiniai žodžiai: Tiesinių lygčių sistemos. Kramerio formulės. Atvirkštinės matricos metodas. Gauso metodas. Bazinio minoro metodas. Tarptautinis prekybos planas. Tiesinio programavimo grafinis uždavinių sprendimas.
Literatūra: [Apy01] 115–124 p.; [Pek05] 35–52 p.; [Rum76] X skyrius, 140–161 p.

2.1. Tiesinių lygčių sistemos

Nagrinėkime sistemą, sudarytą iš m lygčių ir n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

čia a_{ij}, b_i $(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$ – realieji skaičiai. Skaičiai a_{ij} vadinami sistemos koeficientais, b_i – laisvaisiais nariais, x_j – nežinomaisiais (arba kintamaisiais). Ši sistema vadinama **tiesinių lygčių sistema**, nes ją sudarančios lygtys yra tiesinės (pirmos eilės) nežinomųjų x_j atžvilgiu.

Bendruoju atveju lygčių skaičius m nebūtinai sutampa su nežinomųjų skaičiumi n.

Tiesinių lygčių sistemos sprendiniu vadinamas skaičių rinkinys $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, kurį įrašę vietoj nežinomųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iš kiekvienos lygties gauname teisingą lygybę.

Kai visi laisvieji nariai $b_i = 0$ $(i = 1, ..., m)$, sistema vadinama **homogenine lygčių sistema**, o kai bent vienas $b_i \neq 0$ – **nehomogenine lygčių sistema**.

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sudaryta iš sistemos koeficientų, vadinama **sistemos matrica,** o matrica

$$A\,|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

gauta prie A prijungus laisvųjų narių stulpelį, vadinama **išplėstąja sistemos matrica**.

Tiesinių lygčių sistemą, kuri turi bent vieną sprendinį, vadiname **suderinta** sistema.

Tiesinių lygčių sistemą, kuri neturi sprendinių, vadiname **nesuderinta** sistema.

Suderinta sistema vadinama **apibrėžta**, jei ji turi vienintelį sprendinį.

Suderinta sistema vadinama **neapibrėžta**, jei ji turi be galo daug sprendinių.

Dvi sistemos vadinamos **ekvivalenčiomis**, kai bet kuris vienos sistemos sprendinys kartu yra ir kitos sistemos sprendinys, ir atvirkščiai. Ekvivalenčiųjų sistemų sprendinių aibės sutampa.

2.2. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas atvirkštinės matricos metodu

Tarkime, turime tiesinių lygčių sistemą, turinčią n lygčių su n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

kurią galime užrašyti tokia matricine lygtimi

$$\boxed{\text{AX=B,}}$$

$$\text{kur } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{– sistemos koeficientų matrica,} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

– nežinomųjų vektorius, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – laisvųjų narių vektorius. Iš matricinės lygties galime gauti $X = A^{-1}B$. Tai ir yra duotosios tiesinių lygčių sistemos sprendinys. Tam tikslui reikia apskaičiuoti koeficientų matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}, todėl turi būti $\det A \neq 0$.

2.2.1 pavyzdys. Išspręsime duotą sistemą, remdamiesi atvirkštinės matricos metodu:

$$\begin{cases} x + y - z &= 2, \\ 2x + 3y + z &= 1, \\ -x + 2y - 2z &= 1. \end{cases}$$

Sprendimas

Apskaičiuojame duotosios sistemos koeficientų matricos determinantą

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 - 4 - 3 - 2 + 4 = -12 \neq 0.$$

Dabar randame matricos adjunktus:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 2) = 0,$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 1) = 3,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3,$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 2) = -3,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7,$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3,$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$

Taigi turime

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Atsakymas. $(1,\ 0,\ -1)$.

2.2.2 pavyzdys. Išspręsime duotąją sistemą, remdamiesi atvirkštinės matricos metodu:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>

Sudarome sistemos koeficientų matricą

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame sudarytos matricos determinantą:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Kadangi $\det A = 4 \neq 0$, tai galime apskaičiuoti atvirkštinę matricą:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tuomet randame duotosios sistemos sprendinį:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Taigi sprendinys yra $(1,\ -3,\ 2)$.

Atsakymas. $(1,\ -3,\ 2)$**.**

Pastaba

Lygčių sistema gali būti sprendžiama atvirkštinės matricos metodu tada, kai jos koeficientų matrica yra kvadratinė ir kai $\det A \neq 0$.

2.2.3 pavyzdys. Atvirkštinės matricos metodu išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 10, \\ x + 2y + 2z = 17, \\ x + 4y - 5z = 63, \\ 2x + y - 2z = 25. \end{cases}$$

Šios lygčių sistemos atvirkštinės matricos metodu nespręsime, nes joje yra 4 lygtys ir 3 nežinomieji. Užrašytos lygčių sistemos koeficientų matricos matmenys yra 4×3, o tai nėra kvadratinė matrica, todėl negalime apskaičiuoti determinanto. Šią sistemą reikėtų spręsti Gauso metodu.

2.2.4 pavyzdys. Atvirkštinės matricos metodu išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z &= 6, \\ x + 2y + 2z &= 10, \\ 4y + 2z &= 12. \end{cases}$$

Sprendimas
Lygčių sistemos koeficientų matrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

yra kvadratinė, todėl apskaičiuojame jos determinantą.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 4 - 0 - 16 + 4 = 0.$$

Kadangi determinantas lygus nuliui, atvirkštinės matricos metodu lygčių sistemos nespręsime. To tiesiog neįmanoma padaryti, nes atvirkštinė matrica neegzistuoja. Todėl šią sistemą reikėtų spręsti Gauso metodu.

2.3. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Kramerio metodu

Tarkime, turime tiesinių lygčių sistemą, sudarytą iš n lygčių su n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Sudarykime šios sistemos koeficientų matricą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ir pažymėkime matricos A determinantą taip:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tarkime, kad $\Delta \neq 0$.
Determinanto Δ pirmąjį stulpelį pakeitus laisvųjų narių $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ stulpeliu, gaunamas determinantas

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanto Δ antrąjį stulpelį pakeitus laisvųjų narių $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ stulpeliu, gaunamas determinantas

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Analogiškai determinanto Δ trečiąjį stulpelį pakeisime laisvųjų narių $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ stulpeliu, determinanto Δ ketvirtąjį stulpelį pakeisime laisvųjų narių $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ stulpeliu ir t. t., kol galiausiai determinanto Δ n-tąjį stulpelį pakeisime laisvųjų narių $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ stulpeliu ir gausime

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}.$$

Tada $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ – **Kramerio**[2] **formulės**, o duotosios tiesinių lygčių sistemos sprendinys yra toks rinkinys $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$, kur $\Delta \neq 0$.

Pastabos

- Jei $\Delta \neq 0$, tai nagrinėjama lygčių sistema turi vienintelį sprendinį.
- Jei $\Delta = 0$, o bent vienas iš $\Delta_1,\ \Delta_2,\ ...,\ \Delta_n$ nelygus nuliui, tai nagrinėjama sistema neturi sprendinių.

2.3.1 pavyzdys. Išspręsime duotą sistemą, remdamiesi Kramerio formulėmis:

$$\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 + 4x_3 & = 27, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 & = 13. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>
Sudarome sistemos koeficientų matricos determinantą Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 133.$$

[2]Gabriel Cramer (1704–1752) – šveicarų matematikas.

Tada sudarome ir apskaičiuojame determinantus Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 27 & -8 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 13 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 133,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 27 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & 13 & 3 \end{vmatrix} = -133,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -8 & 27 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 399.$$

Tuomet pagal Kramerio formules randame:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{133}{133} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-133}{133} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{399}{133} = 3.$$

Taigi duotosios tiesinių lygčių sistemos sprendinys yra $(1,\ -1,\ 3)$.

Atsakymas. $(1,\ -1,\ 3)$**.**

1.5 testas

1 Tarkime, kad u, y yra sistemos $\begin{cases} bu + ry &= f \\ cu + qy &= d \end{cases}$ nežinomieji, $bq = rc$ ir $bd \neq cf$.
Tada ši sistema
① turi vienintelį sprendinį; ② turi du sprendinius;
③ neturi sprendinių; ④ turi be galo daug sprendinių.

Išspręskite tiesinių lygčių sistemą $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -5 \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= -2 \end{cases}$
Kramerio metodu. Pažymėkime:
A – sistemos matrica; $D = \det A$;
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} & \frac{D_2}{D} & \frac{D_3}{D} \end{pmatrix}^T$ – sistemos sprendinys.

2 $D =$
① 278 ; ② -446 ; ③ 312 ; ④ 462 ;
⑤ -278 ; ⑥ 446 ; ⑦ -312 .

3 $D_1 =$

① $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; ② $\begin{vmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & -4 \\ -12 & -3 & -5 \end{vmatrix}$;

③ $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -8 & 0 & -3 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix}$; ④ $\begin{vmatrix} -6 & -5 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

4 $D_2 =$

① $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; ② $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -5 & -8 & -3 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$;

③ $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -5 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$; ④ $\begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \\ -4 & -7 & 0 \end{vmatrix}$.

5 $D_3 =$

① $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -5 & 4 & -5 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$; ② $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$;

③ $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ -5 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; ④ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 0 & -8 \\ -1 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

6 $x_1 =$ ① $-\frac{4}{139}$; ② $\frac{259}{278}$; ③ $-\frac{35}{139}$; ④ $\frac{7}{278}$; ⑤ $-\frac{61}{278}$.

7 $x_2 =$ ① $\frac{13}{278}$; ② $-\frac{46}{139}$; ③ $-\frac{45}{278}$; ④ $-\frac{73}{278}$; ⑤ $-\frac{2}{139}$.

8 $x_3 =$ ① $\frac{8}{139}$; ② $\frac{49}{278}$; ③ $\frac{10}{139}$; ④ $-\frac{63}{278}$; ⑤ $-\frac{10}{139}$.

Išspręskite tiesinių lygčių sistemą $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 & = -5 \end{cases}$

Kramerio metodu. Pažymėkime:
A – sistemos matrica; $D = \det A$;
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D} & \frac{D_2}{D} & \frac{D_3}{D} \end{pmatrix}^T$ – sistemos sprendinys.

9 $D =$ ① -19 ; ② 44 ; ③ -37 ; ④ 37 ; ⑤ -44 .

$\boxed{10}$ $D_1 =$ ① -48 ; ② 11 ; ③ 136 ; ④ 79 ; ⑤ 98 .

$\boxed{11}$ $D_2 =$ ① -12 ; ② 71 ; ③ 36 ; ④ 90 ; ⑤ -160 .

$\boxed{12}$ $D_3 =$ ① 98 ; ② 140 ; ③ 68 ; ④ -34 ; ⑤ 94 .

$\boxed{13}$ $x_1 + x_2 + x_3 =$ ① $-\frac{29}{11}$; ② $\frac{7}{11}$; ③ $\frac{83}{44}$; ④ $-\frac{9}{4}$; ⑤ $\frac{69}{44}$.

2.4. Matricos rangas

Matricos **rangu** vadinama didžiausios eilės minoro, nelygaus nuliui, eilė. Matricos rangą žymėsime $rang\,(A)$.

Tačiau skaičiuoti pagal apibrėžimą matricos rangą nėra patogu. Naudinga žinoti, kad matricos rangas yra tiesiškai nepriklausomų eilučių (stulpelių) skaičius, o ekvivalenčių matricų rangai lygūs. Todėl atliekame elementarius pertvarkymus, kurie nepakeičia matricos rango, suteikdami matricai trikampio, trapecijos ar laiptuotą formą. Jei pertvarkant atsiranda nulinė eilutė (stulpelis), tai ją išbraukiame. Tuomet nenulinių eilučių (stulpelių) skaičius yra matricos rangas.

Elementarieji pertvarkymai, kurie nekeičia matricos rango, yra šie veiksmai:

- sukeičiamos vietomis eilutės (stulpeliai),
- matricos eilutė (stulpelis) dauginama iš nelygaus nuliui skaičiaus,
- prie vienos eilutės (stulpelio) pridedama kuri nors kita eilutė (stulpelis), padauginta iš skaičiaus, nelygaus nuliui.

2.4.2 pavyzdys. Apskaičiuosime matricos A rangą, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sprendimas

Atliksime elementarius matricos pertvarkymus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{3)}{\sim}$$

$$\overset{3)}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 5 & -10 & -15 \end{pmatrix}\overset{4)}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\overset{5)}{\sim}$$

$$\overset{5)}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1) pirmoji ir antroji eilutės sukeistos vietomis;
2) pirmoji eilutė padauginta iš (-2) ir pridėta prie antrosios eilutės;
3) pirmoji eilutė padauginta iš (-3) ir pridėta prie trečiosios eilutės;
4) antroji eilutė padalinta iš 3, o trečioji eilutė padalinta iš 5;
5) antroji eilutė padauginta iš (-1) ir pridėta prie trečiosios eilutės.

Atmetę gautąją nulinę eilutę, matome, kad matrica A suvesta į trapecijos formą. Dabar galime teigti, kad matricos A rangas yra 2 (nenulinių eilučių skaičius), t. y. $rang\,(A) = 2$.

Atsakymas. $rang\,(A) = 2$.

2.4.2 pavyzdys. Apskaičiuosime matricos A rangą, kai

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Sprendimas</u>
Atliksime elementarius matricos pertvarkymus:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\overset{1)}{\sim}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\overset{2)}{\sim}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -14 & 29 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\overset{3)}{\sim}$$

$$\overset{3)}{\sim}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -14 & 29 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}\overset{4)}{\sim}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -14 & 29 \end{pmatrix}\overset{5)}{\sim}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 127 \end{pmatrix},$$

1) pirmasis ir trečiasis stulpeliai sukeisti vietomis;
2) pirmoji eilutė padauginta iš 5 ir pridėta prie antrosios eilutės;
3) pirmoji eilutė pridėta prie trečiosios eilutės;
4) antroji ir trečioji eilutės sukeistos vietomis;
5) antroji eilutė padauginta iš 14 ir pridėta prie trečiosios eilutės.

Taigi elementus po pagrindine įstrižaine pavertėme nuliais ir nė viena eilutė netapo nuline, todėl nagrinėjamos matricos rangas yra 3 (nenulinių eilučių skaičius), t. y. $rang\,(A) = 3$. Čia matrica A suvesta į trikampio formą.

Atsakymas. $rang\,(A) = 3$.

1.6 testas

1 Matricos $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rangas lygus

① dviem; ② nuliui; ③ vienam; ④ trims; ⑤ šešiems.

Pažymėkime $r(t) = rang \begin{pmatrix} 8 & 8 & t \\ -9 & -9 & t \\ 8 & 8 & t \end{pmatrix}$.

2 Išspręskite lygtį $r(t) = 2$.

① $t = 0$; ② $t \neq 0$; ③ R; ④ $t > 2$; ⑤ $\varnothing$; ⑥ $t < 2$.

3 Kuris teiginys yra teisingas?

(A) $r(t) \equiv const$;

(B) $r(t) \equiv 1$;

① (B);
② nė vienas;
③ abu teiginiai;
④ (A).

4 Apskaičiuokite $rang \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

① du; ② trys; ③ penki; ④ vienas; ⑤ keturi; ⑥ nulis.

2.5. Kronekerio ir Kapelio teorema

Turime lygčių sistemą:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Sistemos matrica $A = ||a_{ij}||_{m\times n}$, išplėstoji matrica

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Kronekerio[3] **ir Kapelio**[4] **teorema**. Tiesinių lygčių sistema yra **suderinta** tada

[3]Leopold Kronecker (1823–1891) – vokiečių matematikas.

[4]Alfredo Capelli (1855–1910) – italų matematikas.

ir tik tada, kai

$$rang\ A = rang\ (A|B).$$

Sistema yra **apibrėžta**, kai $rang\ A = n$.

Bendrojo sprendinio struktūra

Nehomogeninės		*Homogeninės*		*Nehomogeninės*
lygties		*lygties*		*lygties*
bendrasis	=	*bendrasis*	+	*atskirasis*
sprendinys		*sprendinys*		*sprendinys*

Pavyzdžiui,

$$\begin{cases} x + y + z & = 2, \\ x - y - 2z & = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Gauso metodu

Gauso metodas – tai nuoseklus nežinomųjų eliminavimo metodas, kai duotąją sistemą suvedame į laiptuotą, trapecinę arba trikampę tiesinių lygčių sistemą.

Šis metodas patogus tuo, kad juo galima spręsti **bet kurią** tiesinių lygčių sistemą. Turime tiesinių lygčių sistemą iš m lygčių ir n nežinomųjų:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Šią sistemą patogiau spręsti pertvarkant ne jos lygtis, o išplėstosios matricos eilutes. Sudarykime šios sistemos **išplėstąją matricą**:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Elementariaisiais eilučių pertvarkymais išplėstoji matrica $A\,|B$ pakeičiama tokia matrica:

$$A\,|B \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3r}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} & b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_{r+1}^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Elementarūs pertvarkymai galimi tokie:
1) bet kurios eilutės elementus galima padauginti arba padalinti iš skaičiaus, nelygaus nuliui;
2) bet kurią eilutę galima pakeisti, pridėjus prie jos kitą eilutę, padaugintą iš skaičiaus, nelygaus nuliui;
3) nulinę eilutę, jei visi jos nariai lygūs nuliui ir laisvasis narys už brūkšnio taip pat lygus nuliui, galime atmesti;
4) eilutes galima sukeisti vietomis.

Svarbu

Lygčių sistema gali:
1) turėti vienintelį sprendinį (jei $rang\,(A) = rang\,(A\,|B\,) = n$);

2) neturėti sprendinių (jei $rang\,(A) \neq rang\,(A\,|B\,)$);

3) turėti be galo daug sprendinių (jei $rang\,(A) = rang\,(A\,|B\,) < n$).

Su šiais atvejais susipažinsime išsprendę konkrečius pavyzdžius.

2.6.1 pavyzdys. Gauso metodu išspręsime duotąją keturių lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ \ \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 \qquad\ \ - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>
Sudarome sistemos išplėstąją matricą:

$$A\,|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Sukeitę vietomis pirmąją ir antrąją eilutes, turime:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios eilutės nekeičiame, prie antrosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), prie trečios pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3), o prie ketvirtos pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2). Gauname

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right).$$

Dabar pirmosios ir antrosios eilučių nebekeičiame, o prie trečiosios ir ketvirtosios eilučių pridedame antrąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Pirmųjų trijų eilučių nebekeičiame, o prie ketvirtosios eilutės pridedame trečiąją eilutę, padaugintą iš 2. Gauname

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ketvirtąją eilutę galime išbraukti, nes visi jos elementai lygūs nuliui, o trečiąją eilutę galime padauginti iš (-1). Tada turėsime:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Šią matricą atitinka tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ \qquad x_2 - 3x_3 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Iš čia nuosekliai randame:

$$\begin{aligned} & x_3 = 1, \\ & x_2 = 3x_3 = 3 \cdot 1 = 3, \\ & x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 = 1 + 3 - 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Taigi duota sistema turi vienintelį sprendinį $(2,\ 3,\ 1)$.
Pastaba. Šiuo atveju $rang\,(A) = rang\,(A\,|B\,) = 3$ (nes po elementariųjų pertvarkymų liko trys nenulinės eilutės ir matricos forma yra trikampė).

Atsakymas. $(2,\ 3,\ 1)$.

2.6.2 pavyzdys. Gauso metodu išspręsime duotąją trijų lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \ \ x_3 + 4x_4 = 3, \\ \ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + \qquad\ x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>
Sudarome sistemos išplėstąją matricą:

$$A\,|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

Sukeitę vietomis pirmąją ir antrąją eilutes, turime:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios eilutės nekeičiame, prie antrosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), o prie trečiosios pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 2 \end{array} \right).$$

Dabar pirmosios ir antrosios eilučių nebekeičiame, o prie trečiosios eilutės pridedame antrąją eilutę, padaugintą iš (-1). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Iš gautosios matricos matome, kad duotoji lygčių sistema sprendinių neturi, nes paskutinė eilutė atitinka lygtį

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1,$$

o tokia lygtis neturi nė vieno sprendinio.

Pastaba. Šiuo atveju $rang\,(A) = 2$, o $rang\,(A\,|B\,) = 3$, t. y. $rang\,(A) \neq rang\,(A\,|B\,)$. Todėl sistema sprendinių neturi.

Atsakymas. sistema sprendinių neturi.

2.6.3 pavyzdys. Gauso metodu išspręsime duotąją keturių lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 5, \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

Sprendimas

Sudarome sistemos išplėstąją matricą:

$$A\,|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

Sukeitę vietomis pirmąją ir trečiąją eilutes, turime:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios ir antrosios eilučių nekeičiame, prie trečiosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), o prie ketvirtos pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Sukeičiame vietomis antrąją ir trečiąją eilutes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Dabar pirmosios ir antrosios eilučių nebekeičiame, o prie trečiosios ir ketvirtosios eilučių pridedame antrąją eilutę, padaugintą atitinkamai iš 2 ir (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Prie ketvirtos eilutės pridėję trečiąją eilutę, turime:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ketvirtoji eilutė sudaryta iš nulių, todėl ją galime išbraukti. Antrąją eilutę padauginame iš (-1), trečiąją eilutę padaliname iš (-5). Po visų šių veiksmų turime

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Šią matricą atitinka tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 = 3, \\ \qquad x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 - \quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Po elementariųjų pertvarkymų sistema įgyja trapecinę formą. Gautoje sistemoje nežinomųjų skaičius yra didesnis nei lygčių skaičius, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Lygčių skaičius nurodo bazinių nežinomųjų skaičių. Taigi nagrinėjamu atveju bazinių nežinomųjų yra trys, o laisvasis nežinomasis yra vienas.
Pasirenkame vieną iš nežinomųjų laisvuoju parametru, pavyzdžiui, pasirinkime $x_4 = t, \ t \in R$.
Tuomet

$$\begin{cases} x_1 + 1 - t + \quad t + \quad t = 3 \Rightarrow x_1 = 2 - t, \\ \qquad x_2 + 3t - 2t = 1 \quad \Rightarrow x_2 = 1 - t, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = t. \end{cases}$$

Taigi gavome, kad sistema turi be galo daug sprendinių:

$$\{(2 - t;\ 1 - t;\ \ t;\ t)\,,\ \ t \in R\,\}\,.$$

Šis sprendinys vadinamas bendruoju lygčių sistemos sprendiniu.
Čia x_4 yra laisvasis nežinomasis, o $x_1,\ x_2,\ x_3$ – baziniai nežinomieji.
Imdami $x_4 = t = 0$, gauname bazinį sprendinį $(2;\ 1;\ 0;\ 0)$.
Pastaba. Šiuo atveju $rang\,(A) = rang\,(A\,|B\,) = 3 < 4$, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Bazinių nežinomųjų skaičius sutampa su rangu $rang\,(A)$. Po elementariųjų pertvarkymų matrica A įgyja trapecinę formą.

Atsakymas. $\{(2 - t;\ 1 - t;\ \ t;\ t)\,,\ \ t \in R\,\}$**.**

2.6.4 pavyzdys. Gauso metodu išspręsime duotąją trijų lygčių sistemą su penkiais nežinomaisiais:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 5. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>
Sudarome sistemos išplėstąją matricą:

$$A\,|B = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 7 & -2 & -3 & 3 \\ 6 & -3 & 9 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right).$$

Šią matricą pertvarkysime taip: pirmosios eilutės nekeičiame, prie antrosios eilutės pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-2), o prie trečiosios pridedame pirmąją eilutę, padaugintą iš (-3). Gauname

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Šią matricą atitinka tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 - 4x_4 + x_5 = 1, \\ \qquad\qquad\quad -x_4 \qquad = 2. \end{cases}$$

Po elementariųjų pertvarkymų sistema įgyja laiptuotą formą. Gautoje sistemoje nežinomųjų skaičius yra didesnis nei lygčių skaičius, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Lygčių skaičius nurodo bazinių nežinomųjų skaičių. Taigi nagrinėjamu atveju bazinių nežinomųjų yra trys, o laisvieji nežinomieji yra du.
Pasirenkame du nežinomuosius laisvaisiais parametrais, pavyzdžiui, pasirinkime $x_5 = t_1$ ir $x_2 = t_2$, $t_1, t_2 \in R$.
Tuomet

$$\begin{cases} 2x_1 - t_2 + 3\cdot(-t_1 - 7) + (-2) - 2t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5t_1+t_2+24}{2}, \\ x_3 - 4\cdot(-2) + t_1 = 1 \Rightarrow x_3 = -t_1 - 7, \\ x_4 = -2. \end{cases}$$

Taigi gavome, kad sistema turi be galo daug sprendinių:

$$\left\{ \left(\frac{5t_1 + t_2 + 24}{2};\ t_2;\ -t_1 - 7;\ \ -2;\ t_1 \right),\ t_1, t_2 \in R \right\}.$$

Čia $x_2$ir $x_5$yra laisvieji nežinomieji, o $x_1,\ x_3,\ x_4$ – baziniai nežinomieji.
1 pastaba. Šiuo atveju $rang\,(A) = rang\,(A\,|B\,) = 3 < 5$, todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Bazinių nežinomųjų skaičius sutampa su matricos A rangu.
2 pastaba. Paėmę $t_1 = 0,\ t_2 = 0$, gauname bazinį sprendinį $(12;\ 0;\ -7;\ \ -2;\ 0)$. Be to, jei laisvaisiais nežinomaisiais būtume paėmę x_1 ir x_5, o baziniais – $x_2,\ x_3,\ x_4$, tai tuomet bendrasis sprendinys atrodytų taip:

$$\{(\,t_2;\ \ -5t_1 + 2t_2 - 24;\ \ -7 - t_1;\ \ -2;\ \ t_1\,),\ \ t_1, t_2 \in R\}\,.$$

Atsakymas. $\left\{\left(\frac{5t_1+t_2+24}{2};\ t_2;\ -t_1 - 7;\ \ -2;\ t_1\right),\ t_1, t_2 \in R\right\}$.

1.7 testas

Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} y_1 & +3y_2 & -y_3 & +y_4 & = 15 \\ -y_1 & +y_2 & +y_3 & -3y_4 & = 15 \\ 3y_1 & +2y_2 & -2y_3 & +3y_4 & = 17 \\ 3y_1 & +y_2 & -3y_3 & -3y_4 & = 75 \end{cases}.$$

$\boxed{1}$ $y_1 =$ ① -8; ② 0; ③ 8; ④ -1; ⑤ 10; ⑥ -10.

$\boxed{2}$ $y_2 =$ ① -4; ② -8; ③ 3; ④ 9; ⑤ 0; ⑥ 1.

$\boxed{3}$ $y_3 =$ ① 7; ② -7; ③ -6; ④ 1; ⑤ -1; ⑥ -9.

$\boxed{4}$ $y_4 =$ ① -7; ② 4; ③ -9; ④ -6; ⑤ 0; ⑥ -2.

$\boxed{5}$

$\min\{y_1, y_2, y_3, y_4\} =$ ① -9; ② 1; ③ 4; ④ -3; ⑤ 6; ⑥ -5.

Išspręskite tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} r_1 & & +r_3 & & +2r_5 & = -3 \\ 3r_1 & -3r_2 & -r_3 & -r_4 & -2r_5 & = 26 \\ -r_1 & -3r_2 & & -2r_4 & +3r_5 & = 67 \\ 3r_1 & & & & -r_5 & = -17 \\ -r_1 & +r_2 & -2r_3 & +3r_4 & +r_5 & = -10 \end{cases}.$$

$\boxed{6}$ $r_1 =$ ① 6; ② 4; ③ -6; ④ -8; ⑤ -4; ⑥ 2.

$\boxed{7}$ $r_2 =$ ① -1; ② 1; ③ 8; ④ -9; ⑤ -10; ⑥ 3.

$\boxed{8}$ $r_3 =$ ① 8; ② 3; ③ -9; ④ 2; ⑤ -2; ⑥ -1.

$\boxed{9}$ $r_4 =$ ① 7; ② -3; ③ 5; ④ -1; ⑤ -6; ⑥ -9.

$\boxed{10}$ $r_5 =$ ① -4; ② -7; ③ -1; ④ 5; ⑤ -9; ⑥ 10.

2.7. Bazinio minoro metodas

Tarkime, kad tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m2n}x_n & = b_m, \end{cases}$$

matricos $A = ||a_{ij}||_{m\times n}$ rang $A = r$. Tai reiškia, kad egzistuoja r-tosios eilės minoras $M_r \neq 0$. (Šį minorą vadiname *baziniu.*) Tarkime, kad $M(1,2,\dots,r;1,2,\dots,r) \neq 0$. Priešingu atveju galima sukeisti vietomis sistemos lygtis bei pakeisti kintamųjų $x_1, x_2, \cdots, x_n$ numerius. Jei $r < m$, sistemoje yra lygčių, kurios gali būti eliminuotos (pašalintos) elementariais pertvarkymais. Todėl paliekame sistemoje r lygčių. (Tai galima padaryti, jei sistema yra suderintoji.) Jei $n = r$, sistemos matrica yra kvadratinė ir $\det A \neq 0$.

Tokia sistema turi vienintelį sprendinį, kurį galima rasti Kramerio metodu. Išnagrinėkime atvejį, kai $n > r$, ir perrašykime sistemą taip:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = \\ \qquad\qquad b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = \\ \qquad\qquad b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{r2n}x_r = \\ \qquad\qquad b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Kintamuosius $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ vadiname *laisvaisias* , o $x_1, x_2, \cdots, x_r$ – *baziniais.* Taigi bazinių kintamųjų yra $r =$ *rang* A, o laisvųjų kintamųjų yra $n - r$. Pažymėkime $\delta_j = b_j - \sum\limits_{s=r+1}^{n} a_{js}x_s$. Kadangi $M_r \neq 0$, sistemą sprendžiame taikydami Kramerio formules

$$x_j = \frac{1}{M_r}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \delta_1 & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & \delta_r & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}, \; j = 1,2,\dots,r.$$

Skleisdami šiuos determinantus j-ojo stulpelio elementais, gauname *bendrojo sprendinio* formules:

$$x_j = \gamma_j^0 + \gamma_j^{r+1}x_{r+1} + \cdots + \gamma_j^n x_n, \; j = 1,2,\dots,r,$$

čia $\gamma_j^i,\ i = r+1, r+2, \dots, n$ – priklauso tik nuo koeficientų a_{ij}, o γ_j^0 – dar ir nuo b_1, $b_2, \cdots, b_r$. Kai laisvieji kintamieji $x_{r+1}, \cdots, x_n$ įgyja konkrečias reikšmes, gauname sistemos *atskirąjį sprendinį*. Taigi kai bent vienas koeficientas $\gamma_j^i \neq 0$, sistema turi be galo daug sprendinių.

2.7.1 pavyzdys. Išspręskite TLS bazinio minoro metodu.

$$\begin{cases} x + y + z - w = & 2, \\ x - y - z + w = & 0. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>
Perrašome sistemą:

$$\begin{cases} x + y = & 2 - z + w, \\ x - y = & z - w. \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - z + w & 1 \\ z - w & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - z + w \\ 1 & z - w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 - z + w.$$

Atsakymas. Bendrasis sprendinys $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$;

atskirieji sprendiniai $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.8. Tarptautinės prekybos modelis

Tarkime, kad a_{ij} yra dalis biudžeto, kurią j-oji šalis išleidžia prekėms iš i-tosios šalies pirkti. Turi būti

$$\sum_{i=1} a_{ij} = 1.$$

Laikome, kad visas i-tosios šalies biudžetas x_i išleidžiamas prekėms pirkti savo šalyje arba užsienyje. Tada

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = x_i.$$

Šalių grupės prekyba subalansuota, kai ši lygybė galioja visoms šalims

$$AX = X$$

Teorema. Sistema $AX = X$ turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$det\,(A - E) = 0.$$

2.8.3 pavyzdys. Pateikta trijų šalių prekybos struktūrinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{7} & \frac{2}{3} \\ \frac{13}{18} & \frac{4}{7} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

Matricos elementas a_{ij} reiškia j-osios šalies nacionalinių pajamų dalį, kurią ši šalis išleidžia pirkimams iš i-tosios šalies. Prekyba subalansuota, kai šalių nacionalinės pajamos $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ yra šios matricinės lygties sprendinys.

$$AX = X \quad (*)$$

<u>Sprendimas</u>
Perrašykime $(*)$ matricinę lygtį sistemos pavidalu:

$$\begin{cases} \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = x_1, \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = x_2, \\ \frac{13}{18}x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{2}{15}x_3 = x_3. \end{cases}$$

Dauginame sistemos lygtis atitinkamai iš skaičių $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ir $630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
(kad išvengtume veiksmų su trupmenomis) ir perrašome sistemą taip:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(\frac{1}{9} - 1\right) x_1 + 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7}x_2 + 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{5}x_3 = 0, \\ 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{6}x_1 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{2}{7} - 1\right) x_2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3}x_3 = 0, \\ 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{13}{18}x_1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{4}{7}x_2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(\frac{2}{15} - 1\right) x_3 = 0. \end{cases}$$

Gauname

$$\begin{cases} -280x_1 + 45x_2 + 63x_3 = 0, \\ 7x_1 - 30x_2 + 28x_3 = 0, \qquad (**) \\ 455x_1 + 360x_2 - 546x_3 = 0. \end{cases}$$

Sistemos matricos determinantas turi būti lygus nuliui (jei nepadaryta skaičiavimo klaidų):

$$\begin{vmatrix} -280 & 45 & 63 \\ 7 & -30 & 28 \\ 455 & 360 & -546 \end{vmatrix} = 7 \cdot 15 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} -40 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 65 & 24 & -78 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \cdot 15 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -77 & 169 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 154 & -338 \end{vmatrix} = 0.$$

Išspręskime (**) sistemą bazinio minoro metodu (r.). Paimkime bazinį minorą

$$M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 63 \\ -30 & 28 \end{vmatrix} = 15 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 4 - (-2) \cdot 9) = 3150.$$

Tada spręsdami pirmųjų dviejų lygčių sistemą Kramerio metodu (trečioji lygtis yra priklausoma) (r.) gauname:

$$x_2 = \frac{1}{M} \begin{vmatrix} 280x_1 & 63 \\ -7x_1 & 28 \end{vmatrix} = \frac{7 \cdot 169}{15 \cdot 30} x_1, \ x_3 = \frac{1}{M} \begin{vmatrix} 45 & 280x_1 \\ -30 & -7x_1 \end{vmatrix} = \frac{7 \cdot 11}{30} x_1.$$

Taigi (**) homogeninės sistemos bendrasis sprendinys

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha \left(1, \frac{7 \cdot 169}{15 \cdot 30}, \frac{7 \cdot 11}{30} \right).$$

Subalansuota prekyba vyksta, kai nacionalinių pajamų santykis (imame sveikąjį sprendinį):

$$450 : 1183 : 1155.$$

2.9. Savarankiško darbo užduotys

1.16 užduotis

Išspręskite lygčių sistemas Kramerio metodu:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -28, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 = 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_3 = 7, \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + y + z = 2, \\ 4x - 2y + 6z = 1. \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x - 4y + 4z = 11, \\ 5x + 5y + z = -11, \\ 4x + 2y - z = -1. \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -9, \\ 2x + y + z = -10, \\ 5x - 2y - 4z = 8. \end{cases}$

1.17 užduotis

Atvirkštinės matricos metodu išspręskite lygčių sistemą:

a) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 = -1, \\ -5x_1 + 3x_2 + x_3 = -6, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 28, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -25. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ -2x_1 - 3x_3 = 12, \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$

1.18 užduotis

Apskaičiuokite matricų rangus:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.19 užduotis

Gauso metodu išspręskite tiesinių lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_2 + 6x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_2 + 6x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} 5x_1 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - y + z = 5, \\ 2x + y + z = 6, \\ x + y + 2z = 4, \\ x - 2y - 2z = 5. \end{cases}$ **l)** $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 3x - y + 2z = 4, \\ 2x - 2y + z = 1. \end{cases}$

3. Tiesinio programavimo uždavinių grafinis sprendimas

Raktiniai žodžiai: Tikslo funkcija. Leistinoji aibė. Lygio lygtis. Geometrinis tiesinio programavimo uždavinys.
Literatūra: [Apy01] 205–215 p.; [Puš01] 30–38 p.

Nagrinėsime dviejų kintamųjų standartinį tiesinio programavimo uždavinį:
max, min $(c_1x + c_2y)$, kai

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \leq b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x + a_{m2}y \leq b_m. \end{cases}$$

Čia $f = c_1x+c_2y$ yra **tikslo funkcija**, o **leistinoji aibė** Ω – tiesinių nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Leistinoji aibė, jeigu ji netuščia, gali būti baigtinio arba begalinio ploto. Pasirinkime bet kurį leistinosios srities tašką. Tikslo funkcijos reikšmę tame taške pažymėkime C. Sudarykime lygtį $c_1x + c_2y = C$ ir ją pavadinkime **lygio lygtimi**.

Lygio lygties geometrinis vaizdas yra tiesė, kurią vadinsime tikslo funkcijos **lygio tiese**.

Geometriškai tiesinio programavimo uždavinys formuluojamas taip:
leistinųjų sprendinių aibėje Ω reikia rasti tokį tašką (x^*, y^*), per kurį einančios funkcijos reikšmė f būtų didžiausia (arba mažiausia).

Standartinį uždavinį galime spręsti pagal šitokią schemą:

1. Plokštumoje nubrėžiamos tiesės, kurios gaunamos apribojimų sistemoje nelygybes pakeitus lygybėmis.
2. Pagal gautų nelygybių ženklus nustatoma leistinųjų sprendinių sritis Ω.
3. Plokštumoje nubrėžiamas vektorius $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ ir viena iš tiesių $c_1x + c_2y = C$ (*pavyzdžiui*, $c_1x + c_2y = 0$).
4. Tiesę $c_1x+c_2y = 0$ „stumiant“ vektoriaus $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ kryptimi arba prieš ją, randame maksimumo arba minimumo taškus (jei tokie egzistuoja).
5. Apskaičiuojane maksimumo ir minimumo taškų koordinates.

6. Randame funkcijos f reikšmes tuose taškuose.

Priklausomai nuo leistinųjų sprendinių aibės Ω ir nuo vektoriaus $\mathbf{c}$ padėties galimi įvairūs atvejai:

1. vienintelis sprendinys, esantis daugiakampio Ω viršūnėje,
2. be galo daug sprendinių – daugiakampio Ω briaunoje,
3. nėra sprendinio, nes apribojimų sistema nesuderinta (Ω tuščia aibė),
4. nėra sprendinio, nes tikslo funkcija neaprėžta.

3.0.1 pavyzdys. Grafiškai išspręskite šiuos tiesinio programavimo uždavinius:
a) min ir max $(-3x + y)$

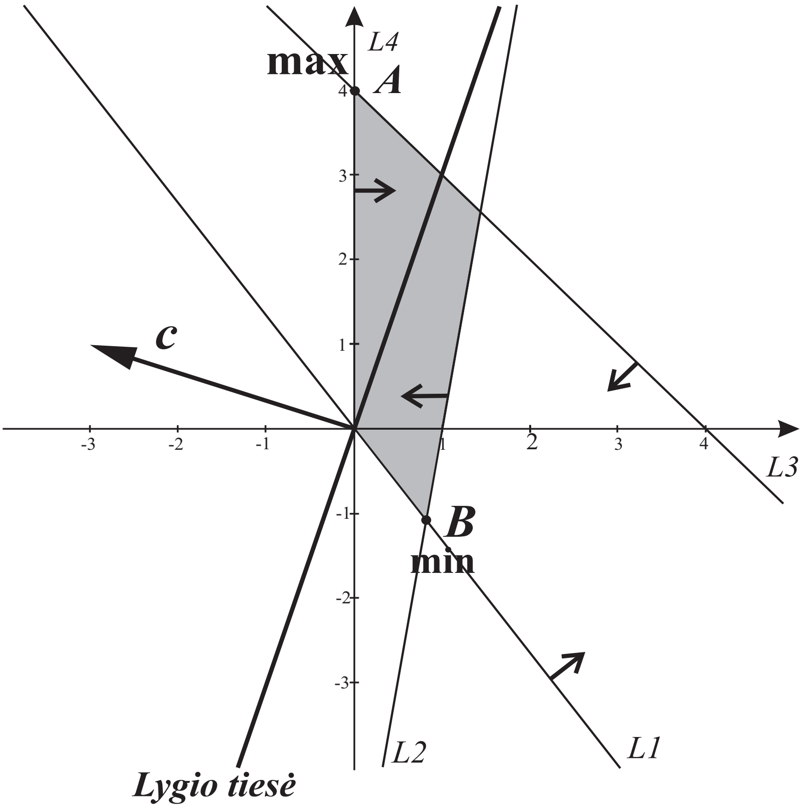
$$\begin{cases} 4x + 3y \geq 0, \\ 6x - y \leq 6, \\ x + y \leq 4, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Sprendimas
Nubrėžiame tieses:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 0\,(L_1)\,, \\ 6x - y &= 6\,(L_2)\,, \\ x + y &= 4\,(L_3)\,, \\ x &= 0\,(L_4)\,. \end{aligned}$$

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį). Geometriškai sprendžiant nelygybę $4x + 3y \geq 0$, pirmiausia brėžiama tiesė $4x + 3y = 0$, pažymint du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, *pavyzdžiui*, (0; 0) ir (−3; 4). Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, pavyzdžiui, tašką $(-1, -1)$. Kadangi taško $(-1, -1)$ koordinatės netenkina šios nelygybės, t. y. $4\cdot(-1)+3\cdot(-1) \geq 0$ ($-7 \geq 0$ – neteisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra priešingoje pusėje negu taškas $(-1, -1)$. Dabar rodykle pažymime šios nelygybės sprendinių aibę. Atliekame tokius pat veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių aibes. Nelygybės $6x - y \leq 6$ sprendinių aibė yra tiesės $6x - y = 6$ kairėje pusėje. Kitos nelygybės $x + y \leq 4$ sprendinių pusplokštumė yra šios tiesės apačioje, o $x \geq 0$ – ašies Oy dešinėje. Visų rastųjų pusplokštumių taškų aibė yra sritis Ω, kurią užtušuojame.

Lieka papildyti brėžinį lygio tiese $-3x + y = 0$ ir vektoriumi $\mathbf{c} = (-3,\ 1)$, kurio koordinatės yra tikslo funkcijoje esantys koeficientai prie x ir y. Atlikus visus nurodytus veiksmus, brėžinys atrodo taip:



3.0.1 pav.

Vektorius $\mathbf{c}$ rodo funkcijos $f = -3x + y$ didėjimą, todėl tiesę $-3x + y = 0$ „stumiame“ lygiagrečiai vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptimi, kol pasiekiame tolimiausią srities Ω tašką A. Šis taškas yra maksimumo taškas, kuris gaunamas susikirtus (L_3) ir (L_4) tiesėms. Išsprendę susikertančių šiame taške tiesių lygčių sistemą, randame taško A koordinates:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 0. \end{cases}$$

Taigi taško A koordinatės yra $x = 0$ ir $y = 4$. Apskaičiuojame funkcijos maksimumą tame taške, t. y. tikslo funkcijoje $f = -3x + y$ vietoj x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\max} = f\,(A) = -3 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4.$$

Lygio tiesę $f = 0$, t. y. tiesę $-3x + y = 0$, „stumiame“ priešinga vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptimi, kol pasiekiame tolimiausią srities Ω tašką B. Šis taškas yra minimumo taškas, kuris gaunamas susikirtus (L_1) ir (L_2) tiesėms. Norėdami rasti šio taško koordinates, turime spręsti sistemą:

$$\begin{cases} 4x+3y=0, \\ 6x-y=6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y=0, \\ y=6x-6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3\left(6x-6\right)=0, \\ y=6x-6, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+18x-18=0, \\ y=6x-6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22x-18=0, \\ y=6x-6, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}, \\ y=6\cdot\frac{9}{11}-6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{11}, \\ y=-\frac{12}{11}. \end{cases}$$

Viršūnės B koordinatės yra $x=\frac{9}{11}$ ir $y=-\frac{12}{11}$. Apskaičiuojame funkcijos minimumą tame taške:

$$f_{\min}=f\left(B\right)=-3\cdot\frac{9}{11}+\left(-\frac{12}{11}\right)=-\frac{27}{11}-\frac{12}{11}=-\frac{39}{11}.$$

Atsakymas. $f_{\max}=f\left(A\right)=4$, kai $x=0$ ir $y=4$,
$f_{\min}=f\left(B\right)=-\frac{39}{11}$, kai $x=\frac{9}{11}$ ir $y=-\frac{12}{11}$.

b) min ir max$(2x+4y)$, kai

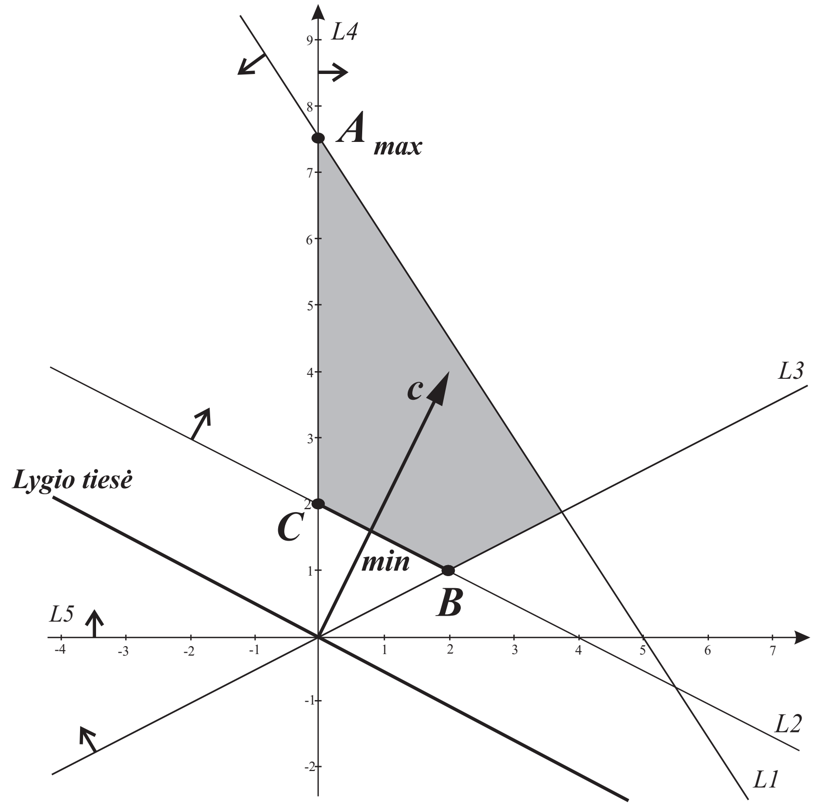
$$\begin{cases} 3x+2y\leq 15, \\ x+2y\geq 4, \\ x-2y\leq 0, \\ x\geq 0, \\ y\geq 0. \end{cases}$$

<u>Sprendimas</u>
Nubrėžiame tieses:

$$\begin{aligned} 3x+2y&=15\left(L_1\right), \\ x+2y&=4\left(L_2\right), \\ x-2y&=0\left(L_3\right), \\ x&=0\left(L_4\right), \\ y&=0\left(L_5\right). \end{aligned}$$

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį). Geometriškai sprendžiant nelygybę $3x+2y\leq 15$, pirmiausia brėžiama tiesė $3x+2y=15$, pažymint du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, *pavyzdžiui*, (5, 0) ir (3, 3). Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina duotąją nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, pavyzdžiui, tašką $(0,0)$. Kadangi taško $(0,0)$ koordinatės tenkina šią nelygybę, t. y. $3\cdot 0+2\cdot 0\leq 15$ ($0\leq 15$ – teisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra po tiese $3x+2y=15$ (toje

pat pusėje, kurioje yra taškas (0, 0)). Tuomet rodykle pažymime šios nelygybės sprendinių pusplokštumę. Analogiškai atliekame veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių pusplokštumes. Nelygybės $x + 2y \geq 4$ sprendinių aibė yra virš tiesės $x + 2y = 4$. Kitos nelygybės x ≥ 0 sprendinių pusplokštumė yra ašies Oy dešinėje, o y ≥ 0 – virš ašies Ox. Visų rastųjų pusplokštumių taškų aibė yra sritis Ω, kurią užtušuojame.
Lieka papildyti brėžinį lygio tiese $2x + 4y = 0$ ir vektoriumi $\mathbf{c} = (2,\ 4)$, kurio koordinatės yra tikslo funkcijoje esantys koeficientai prie x ir y. Atlikus visus nurodytus veiksmus, brėžinys atrodo taip:



3.0.2 pav.

Kadangi aibė Ω yra virš lygio tiesės $2x + 4y = 0$, tai lygiagrečiai „stumiame“ lygio tiesę vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptimi, kol pasiekiame artimiausią srities Ω tašką. Kadangi lygio tiesė yra lygiagreti tiesei $x + 2y = 4$, kurioje yra dvi srities Ω viršūnės B ir C (jos gaunamos susikirtus (2) ir (3), bei (2) ir (4) tiesėms), tai šiuo atveju minimumas yra atkarpa, esanti tarp šių tiesių susikirtimo taškų. Funkcijos minimumui apskaičiuoti pakanka imti bet kurį tašką (iš šių dviejų).
Randame koordinates, išsprendę susikertančių tiesių L_2 ir L_3 lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+2y=4, \\ x-2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-2y, \\ 4-2y-2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-2y, \\ -4y=-4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4-2\ \cdot\ 1, \\ y=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Rastame taške apskaičiuojame funkcijos minimumą, t. y. tikslo funkcijoje vietoj x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\min} = f\,(B) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4 + 4 = 8.$$

Dabar ieškome funkcijos maksimumo taško, t. y. „stumiame“ tiesę $2x+4y=0$ vektoriaus **c** kryptimi, kol pasiekiame labiausiai nutolusį aibės Ω tašką A, kuris yra tiesių L_1ir L_4 sankirta. Išsprendę šių susikertančių tiesių lygčių sistemą, randame taško koordinates:

$$\begin{cases} 3x+2y=15, \\ x=0. \end{cases}$$

Viršūnės A koordinatės yra $x=0$ ir $y=\frac{15}{2}$. Apskaičiuojame funkcijos maksimumą tame taške, t. y. tikslo funkcijoje vietoj x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\max} = f\,(A) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{15}{2} = 0 + 2 \cdot 15 = 30.$$

Atsakymas. $f_{\min} = f\,(BC) = 8$ atkarpoje BC,
$f_{\max} = f\,(A) = 30$, kai $x=0$ ir $y=\frac{15}{2}$.

c) min ir max$(2x+y)$

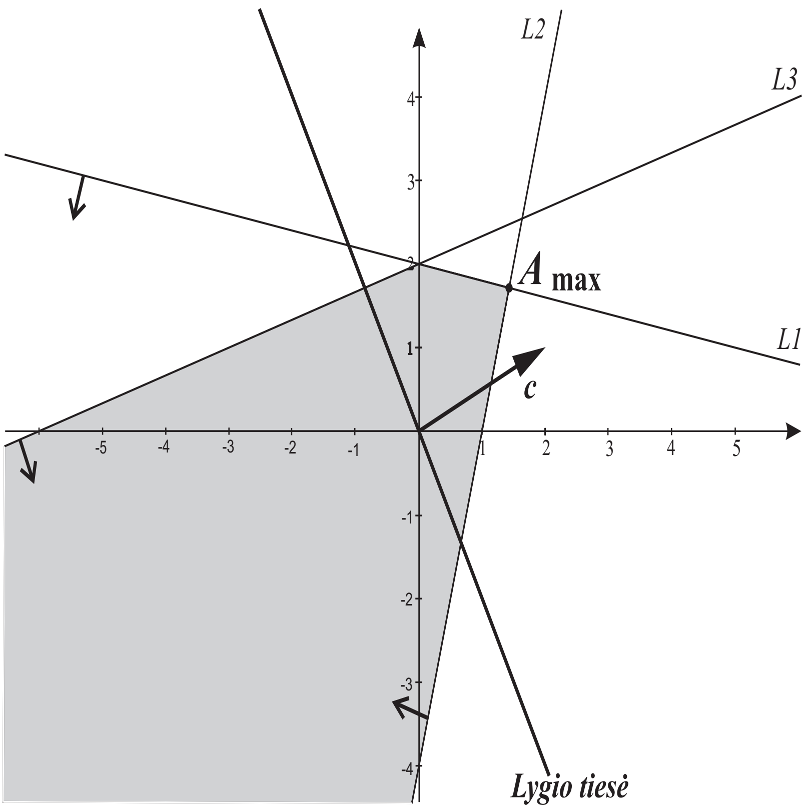
$$\begin{cases} x+5y \leq 10, \\ 4x-y \leq 4, \\ -x+3y \leq 6. \end{cases}$$

Sprendimas
Nubrėžiame tieses:

$$\begin{aligned} x+5y &= 10\,(L_1)\,, \\ 4x-y &= 4\,(L_2)\,, \\ -x+3y &= 6\,(L_3)\,. \end{aligned}$$

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį). Geometriškai sprendžiant nelygybę $x+5y \leq 10$, pirmiausia brėžiama tiesė $x+5y=10$, pažymint du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, pvz., (0; 2) ir (5; 1). Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina duotąją nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, pavyzdžiui, tašką $(0,0)$. Kadangi taško $(0,0)$ koordinatės tenkina šią nelygybę, t. y. $0+5\cdot 0 \leq 10$ ($0 \leq 10$ – teisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra po tiese $x+5y = 10$ (toje pat pusėje, kurioje yra taškas $(0,\ 0)$). Tuomet rodykle pažymime šios nelygybės sprendinių pusplokštumę. Dabar atliekame veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių pusplokštumes. Nelygybės $4x - y \leq 4$ sprendinių aibė yra tiesės $4x - y = 4$ kairėje pusėje, o nelygybės $-x + 3y \leq 6$ sprendinių pusplokštumė yra po tiese $-x + 3y = 6$.

Papildome brėžinį lygio tiese $2x + y = 0$ ir vektoriumi $\mathbf{c} = (2,\ 1)$, kurio koordinatės yra tikslo funkcijoje esantys koeficientai prie x ir y. Atlikus visus nurodytus veiksmus, brėžinys atrodo taip:



3.0.3 pav.

Vektorius $\mathbf{c}$ rodo funkcijos $f = 2x + y$ didėjimą. Taigi tiesę $2x + y = 0$ „stumiame“ lygiagrečiai vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptimi, kol pasiekiame tolimiausią srities Ω tašką A. Šis taškas yra maksimumo taškas. Jis gaunamas susikirtus (L_1) ir (L_2) tiesėms. Išsprendę šiame taške susikertančių tiesių lygčių sistemą, randame taško A koordinates:

$$\begin{cases} x+5y=10, \\ 4x-y=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5y+10, \\ 4x-y=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5y+10, \\ 4(-5y+10)-y=4, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-5y+10, \\ 40-20y-y=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5y+10, \\ -21y=-36, \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-5\cdot\frac{12}{7}+10, \\ y=\frac{36}{21}=\frac{12}{7}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{7}, \\ y=\frac{12}{7}. \end{cases}$$

Apskaičiuojame funkcijos maksimumą taške A, t. y. tikslo funkcijoje vietoj x ir y įrašome gautąsias koordinates. Tada

$$f_{\max} = f(A) = 2\cdot\frac{10}{7}+\frac{12}{7}=\frac{20}{7}+\frac{12}{7}=\frac{32}{7}.$$

Lygio tiesę $f = 0$, t. y. tiesę $2x+y=0$, „stumdami" priešinga vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptimi, gauname minimumo tašką. Tačiau pastebime, kad ir kiek toli lygiagrečiai „stumtume" tiesę $2x+4y=0$ prieš vektoriaus $\mathbf{c}$ kryptį, ji vis tiek turės bendrų taškų su aibe Ω. Šio uždavinio sprendinys neegzistuoja, t. y. $f_{\min}$ neegzistuoja. Funkcija f neaprėžta iš apačios aibėje Ω, t. y. tikslo funkcija f gali įgyti kiek norima mažą reikšmę. Šiuo atveju $f_{\min}=-\infty$.

Atsakymas. $f_{\max}=f(A)=\frac{32}{7}$, kai $x=\frac{10}{7}$ ir $y=\frac{12}{7}$,$f_{\min}=-\infty$.

d) min ir max$(-3x+y)$

$$\begin{cases} x+2y\le 2, \\ x-y\ge 3, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

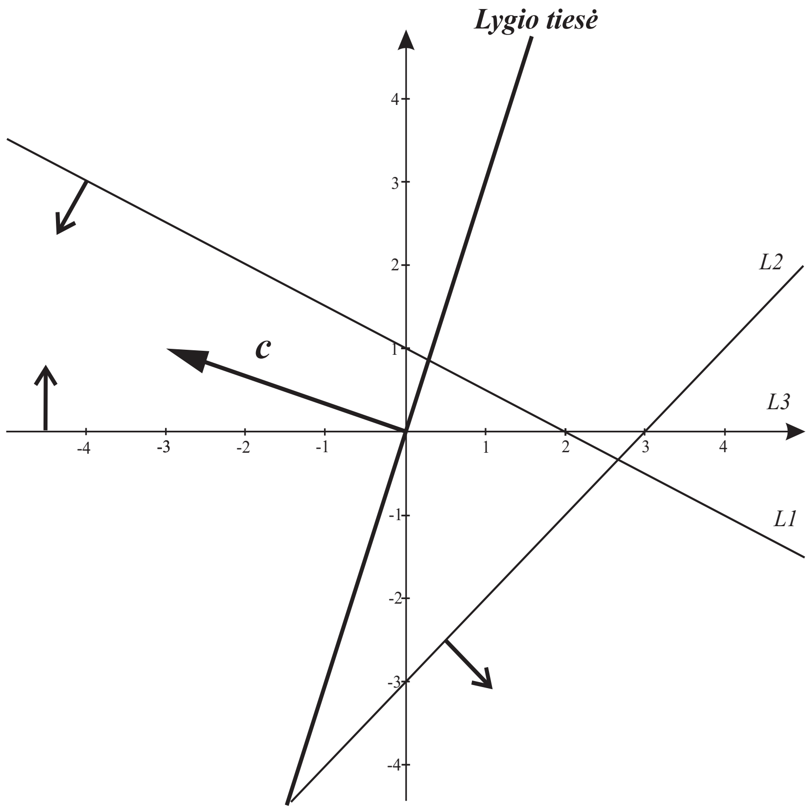
Sprendimas

Nubrėžiame tieses:

$$\begin{aligned} x+2y&=2\,(L_1), \\ x-y&=3\,(L_2), \\ y&=0\,(L_3). \end{aligned}$$

Kad rastume sritį Ω, nustatome kiekvienos nelygybės sprendinių aibę (pažymėdami ties kiekviena tiese jos kryptį). Geometriškai sprendžiant nelygybę $x+2y\le 2$, pirmiausia brėžiama tiesė $x+2y=2$, pažymint du jos taškus, t. y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, *pavyzdžiui*, (0; 1) ir (2; 0). Tada nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina nelygybę. Imkime bet kurį tašką, nepriklausantį šiai tiesei, *pavyzdžiui*, tašką $(0,0)$. Kadangi taško $(0,0)$ koordinatės tenkina šią nelygybę, t. y. $x\cdot 0+2\cdot 0\le 2$ ($0\le 2$ – teisinga nelygybė), tai nelygybės sprendinių pusplokštumė yra toje pusėje kaip ir taškas $(0,0)$. Dabar pažymime šios nelygybės sprendinių aibę rodykle. Atliekame tokius pat veiksmus su kitomis tiesėmis, t. y. rodyklėmis nurodome kiekvienos tiesės sprendinių aibes. Nelygybės

$x - y \geq 3$ sprendinių aibė yra tiesės $x - y = 3$ apačioje, o $y \geq 0$ – virš Ox ašies. Visų rastųjų pusplokštumių taškų aibė yra sritis Ω, tačiau šiuo atveju pastebime, kad visų trijų nelygybių sprendinių pusplokštumės bendrų taškų neturi. Taigi sritis Ω yra tuščia aibė ir uždavinys sprendinių neturi.
Papildžius brėžinį lygio tiese $-3x+y=0$ ir vektoriumi $\mathbf{c} = (-3,\ 1)$, brėžinys atrodo taip:



3.0.4 pav.

Atsakymas: sprendinių nėra.

1.8 testas

Gamintojas gamina dviejų tipų gaminius, kuriems reikia dviejų rūšių žaliavos. Pirmojo tipo (vienam) gaminiui pagaminti sunaudojama 11 pirmosios ir 9 antrosios rūšies žaliavos (vienetų).
Antrojo tipo gaminiui – 15 ir 7.
Pirmosios rūšies žaliavos atsargos yra 25 500,
antrosios – 16 830 (vienetų).
Gamintojas išleidžia darbo užmokesčiui 2 [Eur] pirmojo tipo (vienam) gaminiui pagaminti ir 10 [Eur] – antrojo.
Darbo užmokesčiui privaloma išleisti ne mažiau kaip 1 700 [Eur].
Realizuojant pirmojo tipo gaminį, gamintojo pajamos yra 6 ([Eur] už vienetą) ir 3 – už antrojo.

Pažymėkime gamybos planą (x_1, x_2).

1 Esant gamybos planui (x_1, x_2), antrosios rūšies žaliavos išleidžiama

① $11x_1+15x_2$; ② $7x_1+9x_2$; ③ $7x_1+11x_2$; ④ $11x_1+7x_2$;
⑤ $9x_1+15x_2$; ⑥ $9x_1+7x_2$; ⑦ $11x_1+9x_2$; ⑧ $15x_1+7x_2$.

2 Darbo užmokesčio apribojimai reiškiami nelygybe

① $3x_1+6x_2\leqslant1700$; ② $16830x_1+25500x_2\geqslant1700$;
③ $6x_1+3x_2\geqslant1700$; ④ $3x_1+6x_2\geqslant1700$;
⑤ $6x_1+3x_2\leqslant1700$; ⑥ $10x_1+2x_2\leqslant1700$;
⑦ $2x_1+10x_2\geqslant1700$; ⑧ $16830x_1+25500x_2\leqslant1700$.

3 Leistinųjų planų aibė apibrėžiama taip

① $\begin{cases} \frac{11}{25500}x_1+\frac{1}{1700}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{1870}x_1+\frac{7}{16830}x_2\geqslant1 \\ \frac{1}{850}x_1+\frac{1}{170}x_2\leqslant1 \end{cases}$; ② $\begin{cases} \frac{11}{25500}x_1+\frac{1}{1700}x_2\geqslant1 \\ \frac{1}{1870}x_1+\frac{7}{16830}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{850}x_1+\frac{1}{170}x_2\geqslant1 \end{cases}$;

③ $\begin{cases} x>0,\, y>0 \\ \frac{1}{850}x_1+\frac{1}{170}x_2\leqslant1 \end{cases}$; ④ $\begin{cases} \frac{11}{25500}x_1+\frac{1}{1700}x_2\geqslant1 \\ \frac{1}{1870}x_1+\frac{7}{16830}x_2\geqslant1 \\ \frac{1}{850}x_1+\frac{1}{170}x_2\geqslant1 \end{cases}$;

⑤ $\begin{cases} x>0,\, y>0 \\ \frac{11}{25500}x_1+\frac{1}{1700}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{1870}x_1+\frac{7}{16830}x_2\leqslant1 \end{cases}$; ⑥ $\begin{cases} \frac{11}{25500}x_1+\frac{1}{1700}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{1870}x_1+\frac{7}{16830}x_2\geqslant1 \\ \frac{1}{850}x_1+\frac{1}{170}x_2\geqslant1 \end{cases}$;

⑦ $\begin{cases} \frac{11}{25500}x_1+\frac{1}{1700}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{1870}x_1+\frac{7}{16830}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{850}x_1+\frac{1}{170}x_2\geqslant1 \end{cases}$; ⑧ $\begin{cases} \frac{11}{25500}x_1+\frac{1}{1700}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{1870}x_1+\frac{7}{16830}x_2\leqslant1 \\ \frac{1}{850}x_1+\frac{1}{170}x_2\leqslant1 \end{cases}$.

4 Maksimalias pajamas gamintojas gauna, esant gamybos planui (x_1, x_2)

① (850,0); ② (0,1700); ③ (1275,765);
④ (0,170); ⑤ (1870,0); ⑥ (0,0).

5 Maksimalios pajamos yra ______ [Eur].

① 9 945; ② 60; ③ 26 265; ④ 6; ⑤ 11 220; ⑥ −4; ⑦ 5 100.

3.1. Savarankiško darbo užduotys

1.20 užduotis

Grafiškai pavaizduokite šių tiesinių nelygybių sistemų sprendinių aibes ir apskaičiuokite jų kontūrų viršūnių koordinates:

a) $\begin{cases} 6x - 7y \geq -30, \\ x + 4y \leq 26, \\ 5x + 2y \leq 40, \\ y \geq 0. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y \geq -12, \\ 4x + y \leq 46, \\ x + 2y \leq 22, \\ 2x - 3y \leq 16. \end{cases}$

1.21 užduotis

Grafiškai išspręskite šiuos tiesinio programavimo uždavinius:

a) $\min(2x + 3y)$, kai $\begin{cases} 3x + y \leq 6, \\ 3x - y \leq 4, \\ x \geq -1, \\ y \geq -2. \end{cases}$

b) $\max(2x + y)$, kai $\begin{cases} 4x + y \leq 4, \\ 2x - y \geq -4, \\ x + y \geq -2. \end{cases}$

c) $\min(x - 2y)$, kai $\begin{cases} x + 2y \leq 4, \\ x + y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq -1. \end{cases}$

d) $\max(3x + 2y)$, kai $\begin{cases} x + 6y \leq 30, \\ 2x - y \leq 8, \\ 3x + 2y \geq 6, \\ y \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$

e) $\min(3x_1 + 2x_2)$, kai $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

f) $\min(3x_1 + 4x_2)$, kai $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

g) $\min(4x_1 + 3x_2)$, kai $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 32, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

h) $\min(2x_1 + x_2)$, kai $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \geq -2, \\ 4x_1 + x_2 \leq 4. \end{cases}$

2 skyrius

Matematinė analizė

1. Aibės, funkcijos ir lygtys

Raktiniai žodžiai: Aibės sąvoka. Aibės elementas ($a \in A$). Tuščioji aibė ($\varnothing$). Skaičių aibės (N, Z, Q, R). Skaičių intervalai. Poaibis ($A \subset B$). Aibių sąjunga ($A \cup B$) ir sankirta ($A \cap B$). Funkcijos apibrėžimas, pavyzdžiai ir reiškimo būdai. Skaičių sekos. Formulės. Funkcijos grafikas. Elementariosios funkcijos. Lygtys ir nelygybės. Apytikslis lygčių sprendimas. Funkcijos ekonomikoje.
Literatūra: [Rum76] XIII skyrius, 195–222 p.; [Apy01] II skyrius, 21–35 p.; [Mis99] 111–118 p.; [Stu08] 5 skyrius, 85–112 p.; [Būd08] 54–68 p.

1.1. Aibės sąvoka

Atskirų objektų rinkiniai, grupės, sistemos, kompleksai matematikoje vadinami **aibėmis.** Žymima: A, B, C, D, ...
Aibę sudarantys objektai vadinami **aibės elementais**.

Pavyzdžiui,
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – natūraliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$ – pirminių skaičių aibė;
$L = \{n \in \mathbb{N} : n = 2k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ – lyginių natūraliųjų skaičių aibė;
$C = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$;
$D = \{\mathbb{N}\}$.

Jeigu a **yra** aibės A elementas (priklauso tai aibei), tai rašoma $a \in A$.
Jeigu a **nėra** aibės A elementas, tai rašoma $a \notin A$.

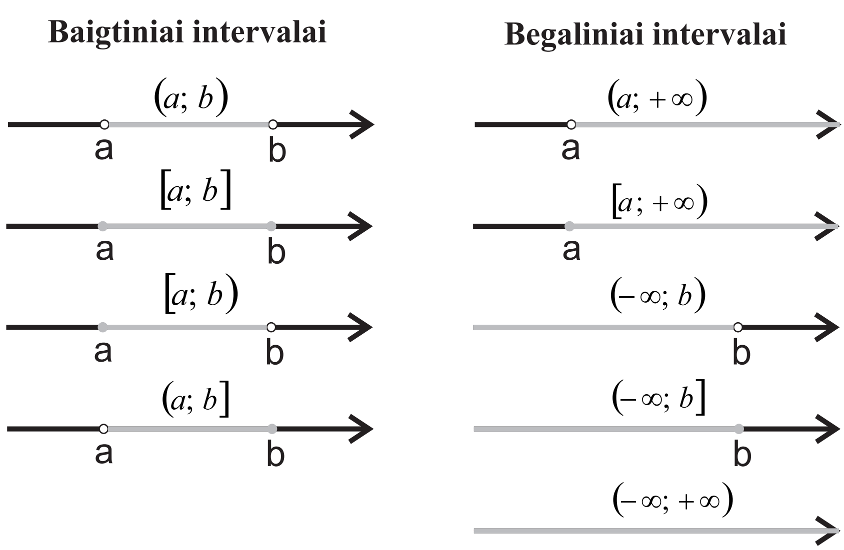
Pavyzdžiui, $1 \in \{0, 1, 3, 5\}$, $2 \notin \{0, 1, 3, 5\}$.

- Aibės gali būti **baigtinės**, t. y. turėti baigtinį elementų skaičių (aibės A, C ir D baigtinės), priešingu atveju - **begalinės** (skaičių aibės P ir L).
- **Aibės** $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ **elementų skaičių** n žymime $|A| = n$. *Pavyzdžiui,* aibė C turi tris elementus (kurie yra aibės $\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$): $|C| = 3$. Aibė D turi vieną elementą ($|D| = 1$), kuris yra **begalinė** natūraliųjų skaičių aibė N.
- **Tuščia aibė** neturi elementų. Ji žymima $\varnothing$.
- **Universali aibė** (U, Ω) – visos nagrinėjamos aibės yra jos poaibiai.

Skaičių aibės

Paminėkime gerai žinomas matematikoje skaičių aibes:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – natūraliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$ – pirminių skaičių aibė;
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – sveikųjų skaičių aibė;
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \ldots\right\}$ – racionaliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{R}$ – realiųjų skaičių aibė.

Realieji skaičiai gali būti pavaizduoti tiesėje:
bet kurį realųjį skaičių atitinka vienintelis tiesės taškas ir atvirkščiai – bet kurį tiesės tašką atitinka realusis skaičius.



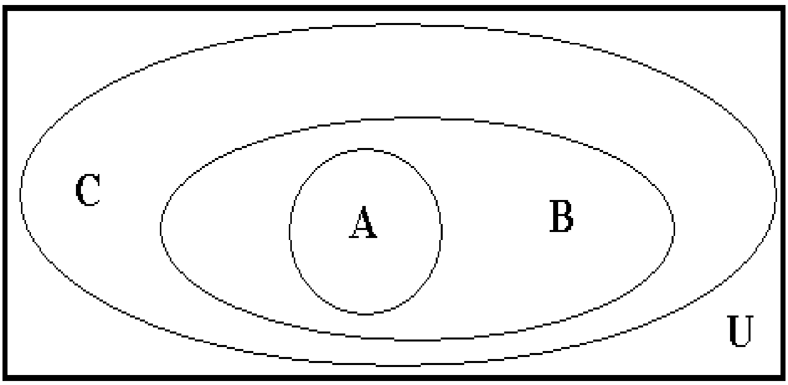
1.1.1 pav. Skaičių intervalai

Aibės poaibis

Jei visi aibės A elementai yra ir aibės B elementai, sakome, kad A yra aibės B **poaibis** ir rašome

$$A \subset B.$$

Pavyzdžiui, $\{1, 2, 3\} \subset \left\{-1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 3, \pi\right\} \subset \mathbb{R}$.



1.1.2 pav.

Pastebėkime, kad skaičių aibėms galioja:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Iš poaibio apibrėžimo išplaukia, kad $A \subset A$, t. y. kiekviena aibė yra savo pačios poaibis.

Aibės A ir B yra **lygios** (rašoma $A = B$), jeigu

$$A \subset B \text{ arba } B \subset A.$$

Pavyzdžiui, aibės $A = \{0, 3, 5\}$ ir $B = \{5, 0, 3\}$ yra lygios.

Jei aibė A turi n elementų, tai jos poaibių skaičius yra 2^n.

Pavyzdžiui,

- tuščioji aibė $\varnothing$ turi vieną ($2^0 = 1$) poaibį (save),
- aibė $A = \{a\}$ turi du poabius ($2^1 = 2$): $\varnothing$ ir A,
- aibė $A = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ turi tris elementus: $0 \in A$, $1 \in A$, $\{0, 1\} \in A$ ir aštuonis poaibius ($2^3 = 8$):

$$\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{\{0,1\}\},\ \{0,1\},\ \{0,\{0,1\}\},\ \{1,\{0,1\}\},\ \{0,1,\{0,1\}\}.$$

2.1 testas

1 Kuris teiginys yra teisingas?
(A) $\{t\} \subset \{t, \{g\}\}$
(B) $\{g\} \in \{t, \{g\}\}$

① nė vienas;
② (B);
③ abu teiginiai;
④ (A).

2 Kuris teiginys yra teisingas?
(A) $\{y, \{g\}\} \subset \{y, \{q\}, g\}$
(B) $\{y, g\} \subset \{y, \{q\}, g\}$

① nė vienas;
② (B);
③ abu teiginiai;
④ (A).

3 Kuris teiginys yra teisingas?
(A) $\emptyset \in \{w, p, x\}$
(B) $\{p, \emptyset\} \subset \{w, p, x\}$

① (A);
② abu teiginiai;
③ nė vienas;
④ (B).

Veiksmai su aibėmis

Aibių A ir B **sąjunga** vadinama aibė, kurios elementai priklauso bent vienai iš aibių A, B (t. y. iš elementų, kurie priklauso arba aibei A, arba aibei B, arba abiem aibėms A ir B). Sąjungą žymime $A \cup B$.

Pavyzdžiui, aibių $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, 3\}$ ir $B = \{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$ sąjunga yra $A \cup B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, 3, \{3, 4\}\}$.

Aibių A ir B **sankirta** vadinama aibė, kurios elementai priklauso ir aibei A, ir aibei B (t. y. iš elementų, kurie priklauso abiem aibėms A ir B). Sankirta žymima $A \cap B$.

Pavyzdžiui,

$$A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, 3\},$$

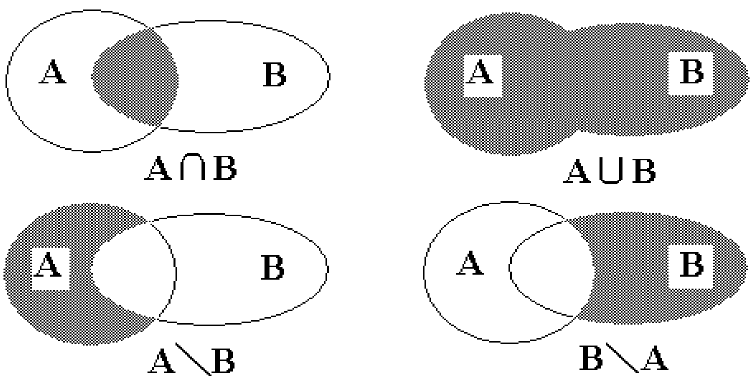
$$B = \{1, \{2\}, \{3, 4\}\},$$

$$A \cap B = \{1\}.$$

Aibių A ir B ***skirtumu*** (žymima $A \setminus B$) vadinama aibė, sudaryta iš tų aibės A elementų, kurie **nėra** aibės B (nepriklauso aibei) elementai.

Pavyzdžiui, kai $A = \{1, \{1\}, 2, \{2, 3\}\}$, $B = \{1, \{2\}, \{2, 3\}, 4\}$, tai $A \setminus B = \{\{1\}, 2\}$, $B \setminus A = \{\{2\}, 4\}$.
Pastebėkime, kad $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Veiksmus su aibėmis ir tų veiksmų savybes dažnai iliustruojame brėžiniais, kuriuose universalioji aibė U vaizduojama kokia nors plokštumos figūra (kvadratu, stačiakampiu ar skrituliu), o visos aibės, – tos figūros dalimis. Tokie piešiniai vadinami Oilerio[1] ir Veno[2] diagramomis.



1.1.3 pav.

Aibės A **papildinys** yra aibė $\overline{A}$, sudaryta iš tų (universaliosios aibės U) elementų, kurie *nėra aibės A elementai*:

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U : \ x \notin A\}.$$

[1] Leonhard Euler (1707–1783) – šveicarų matematikas, mechanikas ir fizikas.
[2] John Venn (1834–1923) – anglų logikas.

Tarkime, kad yra dvi aibės $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ir $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Aibė

$$A \times B = \{(a_i, b_j),\ i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, m\}$$

vadinama aibių A ir B **Dekarto**[3] **sandauga**. Esant begalinėms aibėms,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

1.1.1 pavyzdys. Tarkime, kad $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 7, 11, 13\}$. Visos elementų poros sudaro aibių Dekarto sandaugas:

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(a,1),(a,7),(a,11),(a,13),(b,1),(b,7),(b,11),\\ &(b,13),(c,1),(c,7),(c,11),(c,13)\};\\ B \times A = \{&(1,a),(7,a),(11,a),(13,a),(1,b),(7,b),(11,b),\\ &(13,b),(1,c),(7,c),(11,c),(13,c)\}. \end{aligned}$$

1.1.2 pavyzdys. Turime dvi realiųjų skaičių tiesės atkarpas $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ir $B = [1,2] \subset \mathbb{R}$. Aibės $A \times B = \{(x,y) :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$ ir $B \times A = \{(x,y) :\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ yra du skirtingi stačiakampiai realiųjų skaičių porų plokštumoje $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Operacijų su aibėmis savybės

1	$A \cup B = B \cup A$	komutatyvumo
2	$A \cap B = B \cap A$	dėsniai
3	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	asociatyvumo
4	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	dėsniai
5	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributyvumo
6	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	dėsniai
7	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	de Morgano
8	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	dėsniai
9	$A \cup A = A$	idempotentumo
10	$A \cap A = A$	dėsniai
11	$A \cup \emptyset = A$	
12	$A \cap U = A$	U – universalioji aibė
13	$A \cup \overline{A} = U$	
14	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	
15	$\overline{(\overline{A})} = A$	dvigubojo neigimo dėsnis

[3] René Descartes (1596–1650) – prancūzų filosofas ir matematikas.

2.2 testas

1	$\{q,r,u\} \setminus \{q,r\} =$	① $\{q,r\}$; ② $\{r\}$; ③ $\{q\}$; ④ $\{q,u\}$; ⑤ $\{r,u\}$; ⑥ $\emptyset$; ⑦ $\{q,r,u\}$; ⑧ $\{u\}$.
2	$\{x,g\} \cup \{g\} =$	① $\{g\}$; ② $\{x,g\}$; ③ $\{r,g\}$; ④ $\{r,x,g\}$; ⑤ $\emptyset$; ⑥ $\{x\}$; ⑦ $\{r\}$; ⑧ $\{r,x\}$.
3	$\{p,t\} \cap \{y,t\} =$	① $\{t\}$; ② $\{y,p,t\}$; ③ $\emptyset$; ④ $\{y,p\}$; ⑤ $\{y\}$; ⑥ $\{p\}$; ⑦ $\{y,t\}$; ⑧ $\{p,t\}$.
4	$R \cup \emptyset =$	① R; ② $\emptyset$; ③ R^2; ④ Ω; ⑤ $\{R\}$.
5	$\overline{V \cup P} =$	① $V \cap P$; ② $V \cup P$; ③ $\emptyset$; ④ $\overline{V} \cup \overline{P}$; ⑤ $\overline{V} \cap \overline{P}$.

1.2. Funkcijos apibrėžimas

Tarkime, kad f yra taisyklė, kuri kiekvienam aibės A elementui priskiria kurį nors vieną aibės B elementą. Rašome

$$f : A \to B.$$

Pavyzdžiui,
$A = \{\text{Jonas, Petras, Birutė}\}$ – firmos darbuotojų aibė,
$B = \{\text{vadovas, pavaduotojas, referentas}\}$ – pareigų aibė.
Taisyklė f, kuri nurodo darbuotojo pareigas:

$$f: \begin{array}{lcr} \text{Jonas} & \to & \text{vadovas} \\ \text{Petras} & \to & \text{pavaduotojas} \\ \text{Birutė} & \to & \text{referentas} \end{array}$$

yra funkcija.

Tarkime, kad $a \in A$, $b \in B$. Tada funkciją galima apibrėžti jos reikšmėmis $f(a) = b$. Pažymėkime, JJ – Jonas Jonaitis, PP – Petras Petraitis, JP – Jonas Petraitis, PJ – Petras Jonaitis, v – vadovas, p – patarėjas, r – referentas. Taisyklė g:

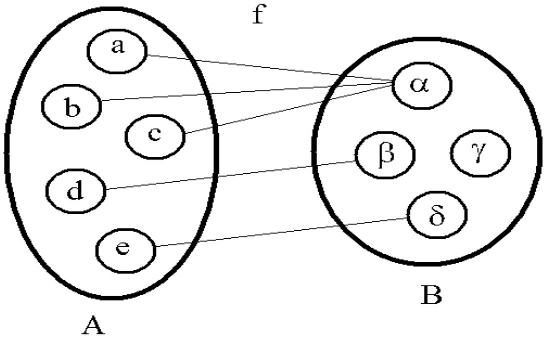
$$g\,(\mathrm{JJ}) = v,\ g\,(\mathrm{JP}) = p,\ g\,(\mathrm{PJ}) = p,\ g\,(\mathrm{PP}) = r$$

irgi yra funkcija.

Funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys

Aibė A vadinama funkcijos $f : A \to B$ **apibrėžimo sritimi**, visų reikšmių $f(a)$ aibė vadinama funkcijos **reikšmių sritimi**.

Paveiksle pavaizduota funkcija
$f : A \to B$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
Jos reikšmių aibė yra $\{\alpha, \beta, \delta\} \subset B$.



1.2.1 pav.

Pagrindiniai funkcijos apibrėžimo srities reikalavimai:

1. Funkcijos $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ (g(x), h(x) – daugianariai) apibrėžimo sritis yra sistemos $\begin{cases} x \in R, \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$ sprendinių aibė.
   Pavyzdžiui, funkcijos $y = \frac{3x+1}{x^2-4}$ apibrėžimo sritis yra sistemos $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ x^2 - 4 \neq 0, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ x \neq \pm 2, \end{cases}$ sprendinių aibė.

2. Funkcijos $y = \sqrt[2k]{g(x)}$, k = 1, 2, 3, ...$(k \in N)$ apibrėžimo sritis yra nelygybės $g(x) \geqslant 0$ sprendinių aibė.
   Pavyzdžiui, funkcijos $y = \sqrt{3x+5}$ apibrėžimo sritis yra nelygybės $3x+5 \geqslant 0$, arba $x \geqslant -\frac{5}{3}$ sprendinių aibė. Taigi $D(y) = \left[-\frac{5}{3}; +\infty\right)$.
   Funkcijos $y = \sqrt[6]{x-4}$ apibrėžimo sritis yra nelygybės $x - 4 \geqslant 0$, arba $x \geqslant 4$ sprendinių aibė, t. y. $D(y) = [4; +\infty)$.

3. Funkcijos $y = \log_{h(x)} g(x)$ apibrėžimo sritis yra sistemos $\begin{cases} g(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$ sprendinių aibė.
   Pavyzdžiui, funkcijos $y = \log_{x+4}(x+3)$ apibrėžimo sritis yra sistemos $\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+4 > 0, \\ x+4 \neq 1, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x > -3, \\ x > -4, \\ x \neq -3, \end{cases}$ sprendinių aibė. Taigi $D(y) = (-3; +\infty)$.

4. Funkcijų $y = \arcsin g(x)$ ir $y = \arccos g(x)$ apibrėžimo sritis yra nelygybės $|g(x)| \leqslant 1$, arba dvigubos nelygybės -1 $\leqslant$ x $\leqslant$ 1 sprendinių aibė.

   Pavyzdžiui, funkcijos $y = \arcsin(x-3)$ apibrėžimo sritis yra nelygybės $|x-3| \leqslant 1$, arba dvigubos nelygybės -1 $\leqslant$ x - 3$\leqslant$ 1 sprendinių aibė. Turime: $-1 \leqslant x - 3 \leqslant 1$, $2 \leqslant x \leqslant 4$. $D(y) = [2; 4]$.

5. Funkcijos $y = \mathrm{tg}\,(g\,(x))$ apibrėžimo sritis yra sistemos
   $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ g(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathrm{Z} \end{cases}$ sprendinių aibė.
   Pavyzdžiui, funkcijos $y = \mathrm{tg}(4x)$ apibrėžimo sritis yra sistemos
   $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ 4x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathrm{Z}, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathrm{Z}, \end{cases}$ sprendinių aibė, t. y.
   $D(y) = \left\{x : x \in R, x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathrm{Z}\right\}$.

6. Funkcijos $y = \mathrm{ctg}(g(x))$ apibrėžimo sritis yra sistemos
   $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ g(x) \neq \pi n, n \in \mathrm{Z} \end{cases}$ sprendinių aibė.
   Pavyzdžiui, funkcijos $y = \mathrm{ctg}\,(5x)$ apibrėžimo sritis yra sistemos
   $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ 5x \neq \pi n, n \in \mathrm{Z}, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty) \\ x \neq \frac{\pi n}{5}, n \in \mathrm{Z}, \end{cases}$ sprendinių aibė, t. y.
   D(y) $= \left\{x : x \in R, x \neq \frac{\pi n}{5}, n \in \mathrm{Z}\right\}$.

1.2.1 pavyzdys. Raskite funkcijų apibrėžimo sritis:
a) $y = \frac{x}{2x-4}$

Sprendimas
Ši funkcija turi prasmę su visomis x reikšmėmis, išskyrus tas, su kuriomis vardiklis lygus nuliui. Vadinasi, $2x - 4 \neq 0$, $2x \neq 4$, $x \neq 2$. Tuomet $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Atsakymas. $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

b) $y = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Sprendimas
Ši funkcija turi prasmę su visomis x reikšmėmis, išskyrus tas, su kuriomis vardiklis lygus nuliui. Vadinasi, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, $x \neq 1$ ir $x \neq 2$. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Atsakymas. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

c) $y = \sqrt{x-4}$

Sprendimas
Kvadratinė šaknis apibrėžta, jei jos pošaknis neneigiamas: $x - 4 \geqslant 0$, $x \geqslant 4$ arba $D(y) = [4; +\infty)$.

Atsakymas. $D(y) = [4; +\infty)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
Sprendimas
Kvadratinė šaknis apibrėžta, jei jos pošaknis neneigiamas: $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, $(x-2)(x-3) \geqslant 0$,
$x \leqslant 2$, $x \geqslant 3$ arba $D(y) = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Atsakymas. $D(y) = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

e) $y = \sqrt{4-x} + \frac{\lg(x+2)}{x}$

Sprendimas
Šioje funkcijoje pošaknis negali būti neigiamas, reiškinys po logaritmu gali būti tik teigiamas, o vardiklis negali būti lygus nuliui. Vadinasi, apibrėžimo sritis bus tos x reikšmės, kurios tenkins nelygybių sistemą:

$$\left\{\begin{array}{l} 4 - x \geqslant 0, \\ x + 2 > 0, \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 4, \\ x > -2, \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow (-2; 0) \cup (0; 4]\,.$$

Atsakymas. $D(y) = (-2; 0) \cup (0; 4]$.

2.3 testas

1

Nustatykite funkcijos $f(x) = \frac{5x^2-2x+12}{\sqrt{x-6}} + 11$ apibrėžimo sritį.

① $(-\infty, 6)$;	② $(-\infty, 6]$;
③ $[6, +\infty)$;	④ $(-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$;
⑤ $(-\infty, +\infty)$;	⑥ $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$;
⑦ $(-\infty, -6) \cup (-6, +\infty)$;	⑧ $(6, +\infty)$.

2

Nustatykite funkcijos $f(x) = \frac{\sqrt{x-10}}{x} + 12\cos(-14x)$ apibrėžimo sritį.

① $(-\infty, -10) \cup (-10, 0) \cup (0, +\infty)$;	② $(-\infty, -10]$;
③ $[-10, +\infty)$;	④ $(-\infty, +\infty)$;
⑤ $[10, \infty)$;	⑥ $(-\infty, -10) \cup (-10, +\infty)$;
⑦ $(-\infty, 10) \cup (10, +\infty)$;	⑧ $\varnothing$;
⑨ $(-\infty, 0) \cup (0, 10) \cup (10, +\infty)$;	⓪ $(-\infty, 10]$.

3

Nustatykite funkcijos $g(x) = \frac{\ln(x+8)}{3x} - 14\sin(10x)$ apibrėžimo sritį.

① $(-\infty, +\infty)$;	② $(-8, 0) \cup (0, +\infty)$;
③ $\varnothing$;	④ $(-\infty, -8]$;
⑤ $(-\infty, 8]$;	⑥ $(-\infty, -8) \cup (-8, +\infty)$;
⑦ $[8, \infty)$;	⑧ $[-8, +\infty)$;
⑨ $(-\infty, 8) \cup (8, +\infty)$;	⓪ $(-\infty, 0) \cup (0, 8) \cup (8, +\infty)$.

4

Nustatykite funkcijos $f(x) = \sqrt{\ln(x+14)} + \sqrt{\frac{x+4}{x+8}}$ apibrėžimo sritį.

① $(-\infty, \infty)$;	② $[4, 14]$;
③ $[-\infty, 4) \cup [8, +\infty)$;	④ $[-13, -8] \cup [-4, +\infty)$;
⑤ $[8, \infty)$;	⑥ $[-13, -8) \cup [8, 14)$;
⑦ $[-13, -8) \cup [4, \infty)$;	⑧ $[-13, -8) \cup [-4, +\infty)$.

1.3. Funkcijų pavyzdžiai

Dolerio kursas

Surašykime į lentelę Europos Centrinio Banko nustatytus JAV dolerio kursus [Eur]:

data	2015-01-01	2015-01-30	2015-02-06
Eur už \$	$0,82366$	$0,88456$	$0,87359$
data	2015-02-20	2015-03-02	2015-04-02
Eur už \$	$0,88511$	$0,89071$	$0,92336$
data	2015-05-02	2015-05-20	2015-06-02
Eur už \$	$0,89166$	$0,89944$	$0,90670$

Turime funkciją $L : D \to R$. D – datų aibė, R – realiųjų skaičių aibė.

Pateikta lentelėje informacija leidžia sužinoti dienos d dolerio kursą $k = L(d)$. Kintamasis d vadinamas **nepriklausomu kintamuoju**, o funkcijos reikšmė k – **priklausomu** kintamuoju.

Paprastųjų palūkanų skaičiavimas

Tarkime, kad bankas moka $r\%$ (procentų) paprastųjų palūkanų per metus ir pradinis įnašas į banką S_0[Eur]. Tada sukaupta po n metų suma

$$S_p\,(n) = S_0\left(1 + \frac{r}{100}\cdot n\right).$$

Sudėtinių palūkanų skaičiavimas

Tarkime, kad bankas moka $r\%$ (procentų) sudėtinių palūkanų per metus ir pradinis įnašas į banką S_0[Eur]. Tada sukaupta po n metų suma

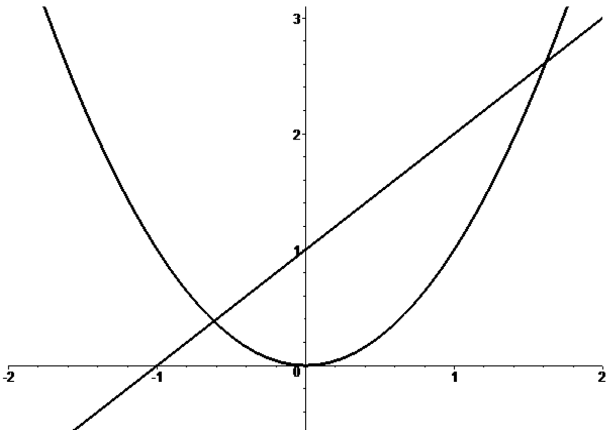
$$S_s\,(n) = S_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

Taigi abiem atvejais $S_{p,s} : N \to R$.

1.4. Funkcijos grafikas

Nagrinėsime **skaičių funkcijas**, t. y. $f : A \to B$, kai $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$. Tarkime, kad A yra baigtinis arba begalinis intervalas. Tada aibę A galima pavaizduoti skaičių tiesėje O_x (abscisių ašyje), o funkcijos reikšmes $y = f(x)$ vaizduojame vertikalioje (ordinačių) ašyje O_y. Taigi plokštumos taškai, kurių Dekarto koordinatės (x, y), sudaro kreivę – funkcijos grafiką.

Paveiksle pavaizduoti funkcijų $y = x + 1$ ir $y = x^2$ grafikai.



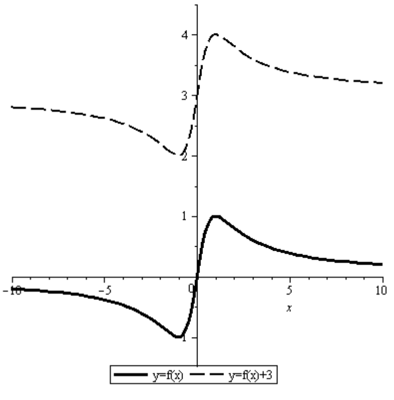
1.4.2 pav.

1.5. Funkcijų grafikų transformacijos

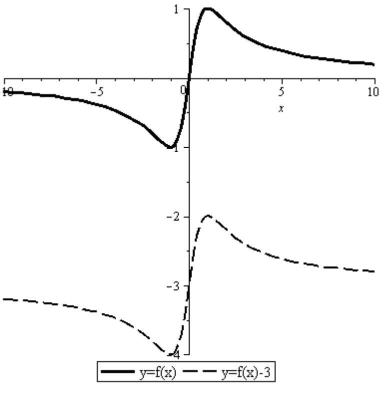
Tarkime, turime funkciją $y = f(x)$, $x \in R$.

1. **Funkcijos** $g(x) = f(x) \pm C$**,** $C > 0$ **grafiko brėžimas**.
   - Funkcijos $g(x) = f(x) + C$ grafikas gaunamas pakėlus funkcijos $y = f(x)$ grafiką per C **aukštyn**.
   - Funkcijos $g(x) = f(x) - C$ grafikas gaunamas perkėlus funkcijos $y = f(x)$ grafiką per C **žemyn**.

   Grafiko koordinatės apskaičiuojamos pagal formulę $(x_0, f(x_0) \pm C)$.

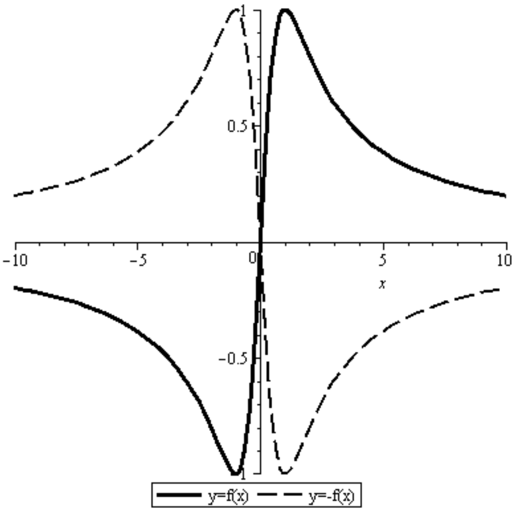


1.5.3 pav.



1.5.4 pav.

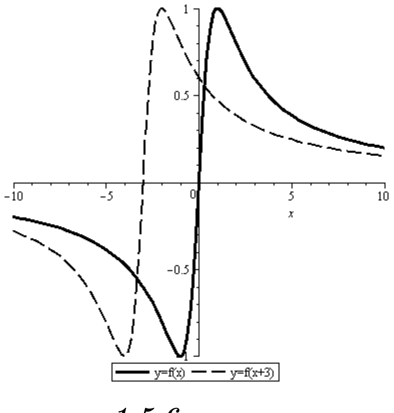
2. **Funkcijos** $g(x) = -f(x)$ **grafiko brėžimas**.
   - $-f(x)$ grafikas yra **simetriškas** $y = f(x)$ **ašies** Ox **atžvilgiu**.



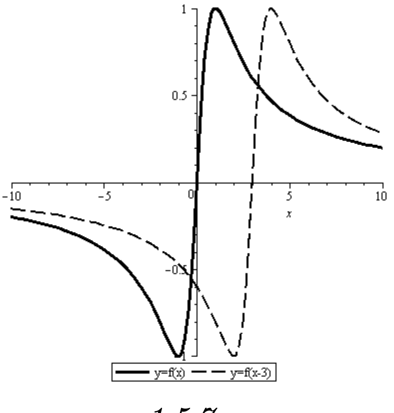
1.5.5 pav.

3. **Funkcijos** $g(x) = f(-x)$ **grafiko brėžimas**.
   - $f(-x)$ grafikas yra **simetriškas** $y = f(x)$ **ašies** Oy **atžvilgiu**.
4. **Funkcijos** $g(x) = f(x \pm a)$**,** $a > 0$ **grafiko brėžimas**.
   - $f(x + a)$, $a > 0$ grafikas gaunamas funkcijos $y = f(x)$ grafiką pastūmus **į kairę** per a vienetų.
   - $f(x - a)$, $a > 0$ grafikas gaunamas funkcijos $y = f(x)$ grafiką pastūmus **į dešinę** per a vienetų.

   Grafiko koordinatės apskaičiuojamos pagal formulę $(x_0 \mp a, f(x_0))$.



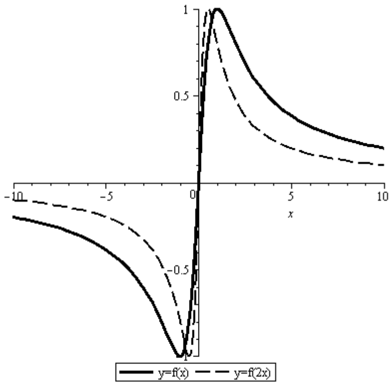
1.5.6 pav.



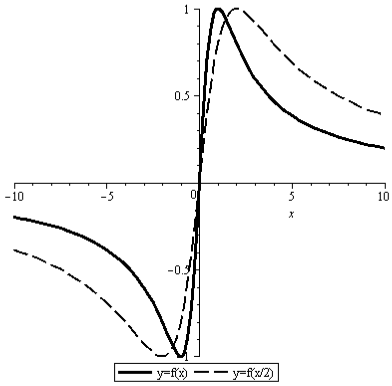
1.5.7 pav.

5. **Funkcijos** $g(x) = f(ax)$**,** $a \neq 0$ **grafiko brėžimas**.

- Kai $a > 1$, funkcijos $f(ax)$ grafikas gaunamas suspaudžiant $f(x)$ grafiką a kartų Ox ašies atžvilgiu (išilgai Ox ašies).
- Kai $0 < a < 1$, funkcijos $f(ax)$ grafikas gaunamas ištempiant $f(x)$ grafiką Ox ašies atžvilgiu $\dfrac{1}{a}$ kartų.



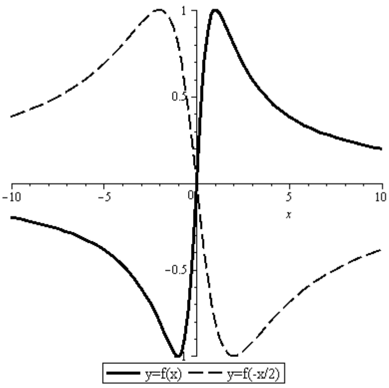
1.5.8 pav.



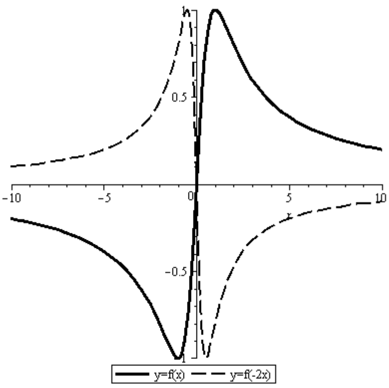
1.5.9 pav.

- Kai $-1 < a < 0$, funkcijos $f(ax)$ grafikas gaunamas ištempiant $f(x)$ grafiką Ox ašies atžvilgiu $\dfrac{1}{|a|}$ kartų ir atliekama simetrija Oy ašies atžvilgiu.
- Kai $a < -1$, funkcijos $f(ax)$ grafikas gaunamas suspaudžiant $f(x)$ grafiką $|a|$ kartų ir atliekama simetrija Oy ašies atžvilgiu.

Grafiko koordinatės apskaičiuojamos pagal formulę $\left(\dfrac{x_0}{a}, f(x_0)\right)$.



1.5.10 pav.

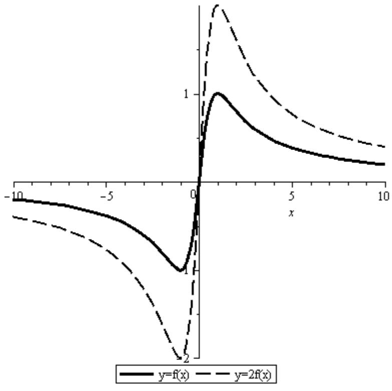


1.5.11 pav.

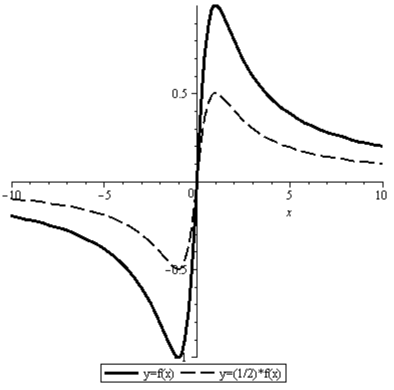
6. **Funkcijos $g(x) = A \cdot f(x)$, $a \neq 0$ grafiko brėžimas**.

- Kai $A > 1$, funkcijos $A \cdot f(x)$ grafikas gaunamas $f(x)$ grafiką ištempiant A kartų ašies Oy atžvilgiu.
- Kai $0 < A < 1$, funkcijos $A \cdot f(x)$ grafikas gaunamas suspaudžiant $f(x)$ grafiką $\dfrac{1}{A}$ kartų ašies Oy atžvilgiu.

Grafiko koordinatės apskaičiuojamos pagal formulę $(x_0, A \cdot f(x_0))$.



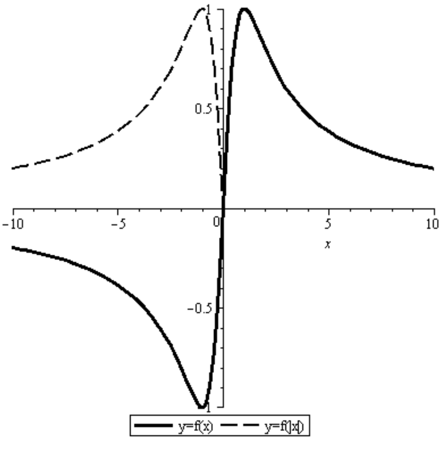
1.5.12 pav.



1.5.13 pav.

7. **Funkcijos** $g(x) = f(|x|)$ **grafiko brėžimas**.

- Funkcijos $f(|x|)$ grafikas gaunamas, kai $x > 0$, paliekama dešinėje pusplokštumėje esanti $f(x)$ grafiko dalis, kai $x < 0$, funkcijos $f(x)$ grafikas nutraukiamas ir atliekama teigiamos grafiko dalies simetrija Oy ašies atžvilgiu.



1.5.14 pav.

8. **Funkcijos** $y = |f(x)|$ **grafikas** gaunamas funkcijos $f(x)$ grafiko dalį, esančią apatinėje pusplokštumėje, simetriškai atspindėjus ašies Ox atžvilgiu.

1.6. Interpoliacija

Tiesės lygtis

Tarkime, kad žinomos dvi tiesinės funkcijos $y(x) = kx + b$ reikšmės $y(x_1) = y_1$ ir $y(x_2) = y_2$. Tai reiškia, kad funkcijos grafikas – tiesė, einanti per taškus $A_1(x_1; y_1)$ ir $A_2(x_2; y_2)$. Tada bet kuriam šios tiesės taškui $(x; y)$ galioja lygybė:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{1.6.1}$$

arba

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1 + y_1. \tag{1.6.2}$$

Taigi koeficientai k ir b lygūs:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ b = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1 + y_1.$$

1.6.1 pavyzdys. Užrašykime, pavyzdžiui, tiesės, einančios per taškus $A(1; 2)$ ir $B(2; 1)$, lygtį.

Sprendimas
Turime $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$. Taikome formulę 1.6.1:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{1 - 2} \Rightarrow x - 1 = -y + 2$$

arba $y = -x + 3$.
Pastebėkime, kad tą patį rezultatą gausime pritaikę 1.6.2 formulę.

Atkarpomis tiesinė funkcija

1.6.2 pavyzdys. Akcijos kaina didėjo nuo sausio 7 d. 12 Eur iki vasario 11 d. 20 Eur, paskui mažėjo iki vasario 28 d. 15 Eur. Sudarykime atkarpomis tiesinę kainos funkciją $k(t)$.

Sprendimas
Laiką t matuosime dienų skaičiumi nuo metų pradžios: sausio 7 d. pažymėkime $t_1 = 7$, vasario 11 d. $t_2 = 42$ ir vasario 28 d. $t_3 = 59$. Tada, kai $t \in [t_1, t_2]$, turime tiesės, einančios per taškus $(7; 12)$ ir $(42; 20)$, atkarpą. Kai $t \in [t_2, t_3]$ – per taškus $(42; 20)$ ir $(59; 15)$. Taigi pirmuoju atveju

$$\frac{k - 12}{20 - 12} = \frac{t - 7}{42 - 7},$$

o antruoju –

$$\frac{k-20}{15-20}=\frac{t-42}{59-42}.$$

Užrašome

$$k(t)=\begin{cases}\frac{8}{35}\,t+\frac{52}{5}\approx 0,2286t+10,40, & \text{kai } 7\leqslant t\leqslant 42,\\ -\frac{5}{17}\,t+\frac{550}{17}\approx -0,2941t+32,35, & \text{kai } 42<t\leqslant 59.\end{cases}$$

Apskaičiuokime akcijos kainą sausio 17 ir vasario 21 dienomis. Sausio 17 d. yra 17-oji metų diena. Kadangi $17\in[7,42]$, gauname

$$k(17)\approx 0,2286\cdot 17+10,40=14,29 \text{ (Eur)}.$$

Vasario 21 d. yra $31+21=52$-oji metų diena. Turime $52\in[42,59]$ ir

$$k(52)\approx -0,2941\cdot 52+32,35=17,06 \text{ (Eur)}.$$

Parabolės lygtis

Raskime parabolę

$$y=ax^2+bx+c,$$

einančią per tris žinomus taškus, nesančius vienoje tiesėje. Tarkime, kad žinomi taškai $A_1\,(x_1;y_1)$, $A_2\,(x_2;y_2)$, $A_3\,(x_3;y_3)$ ir $x_1\neq x_2$, $x_1\neq x_3$, $x_2\neq x_3$. Tada kvadratinį trinarį galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned}y(x)=y_1\,&\frac{(x-x_2)\ (x-x_3)}{(x_1-x_2)\ (x_1-x_3)}\\ +y_2\,&\frac{(x-x_1)\ (x-x_3)}{(x_2-x_1)\ (x_2-x_3)}\\ +y_3\,&\frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_3-x_1)\ (x_3-x_2)}.\end{aligned}$$

Ši formulė vadinama Lagranžo[4] interpoliaciniu daugianariu (polinomu).
1.6.3 pavyzdys. Raskime parabolę, einančią per taškus $(7;12)$, $(42;20)$ ir $(59;15)$.

Sprendimas

$$\begin{aligned}k(t)&=12\,\frac{(t-42)(t-59)}{(7-42)(7-59)}+20\,\frac{(t-7)(t-59)}{(42-7)(42-59)}\\ &\quad+15\,\frac{(t-7)(t-42)}{(59-7)(59-42)}\\ &=\frac{12(t^2-101t+2478)}{1820}-\frac{20(t^2-68t+413)}{595}\end{aligned}$$

[4] Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – prancūzų matematikas ir mechanikas.

$$+\frac{15(t^2-49t+294)}{884}$$
$$=-\frac{311}{30940}\,t^2+\frac{22311}{30940}\,t+\frac{16453}{2210}.$$

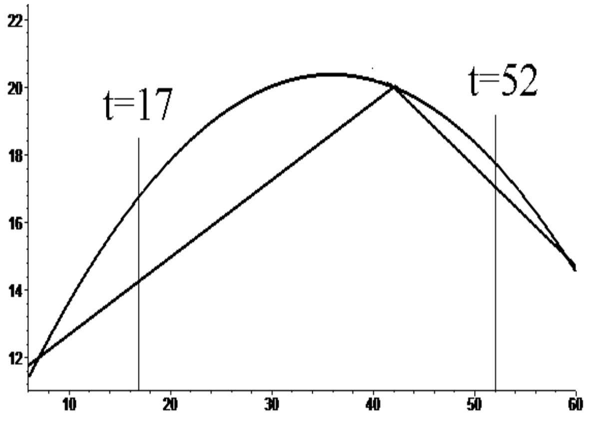
Turime

$$k(t)\approx -0,0101\,t^2+0,7211\,t+7,444.$$

Apskaičiuokime $k(17)$ ir $k(52)$:

$$k(17)\approx -0,0101\cdot 17^2+0,7211\cdot 17+7,444\approx 16,80,$$

$$k(52)\approx -0,0101\cdot 52^2+0,7211\cdot 52+7,444\approx 17,76.$$



1.6.1 pav.

1.7. Funkcijos ekonomikoje

Sąnaudų padengimas

Gamybos sąnaudos – *bendrosios sąnaudos* (TC – angl. *Total Cost*) – yra pastoviųjų ir kintamųjų sąnaudų suma. Pastoviosios sąnaudos (FC – angl. *Fixed Cost*), pavyzdžiui, patalpų nuoma, pastatų energijos sąnaudos, įrenginių priežiūra, nepriklauso nuo gaminių skaičiaus. Kintamosios sąnaudos (VC – angl. *Variable Cost*) priklauso nuo gaminių skaičiaus: medžiagų sąnaudos, įrenginių naudojimo, pardavimo. Pažymėkime x – pagamintų ir parduotų gaminių skaičių. Sąnaudų funkciją žymėsime $TC(x)$. Paprasčiausiu atveju $TC(x)$ yra tiesinė funkcija:

$$TC(x)=VCx+FC.$$

Pajamų funkcija $R(x)$ – (angl. *Revenue*):

$$R(x)=px.$$

Čia p (angl. *price*) – vieno parduoto gaminio kaina. Pelno funkciją P (angl. *Profit*) gauname taip:

$$P(x) = R(x) - TC(x) = px - (VCx + FC) = (p - VC)x - FC.$$

Taigi gautos pajamos padengs gamybos sąnaudas, jei $P(x) > 0$ arba pagamintų ir parduotų gaminių skaičius

$$x > \frac{FC}{p - VC}. \tag{1.7.3}$$

1.7.1 pavyzdys. Vieno gaminio savikaina apskaičiuojama pagal formulę

$$S(x) = \begin{cases} 15, & \text{kai } x < 1\ 000, \\ 15 - \ln(x - 999), & \text{kai } x \geqslant 1\ 000. \end{cases}$$

Pastoviosios gamybos išlaidos yra 10 000 Eur. Vieno gaminio pardavimo kaina yra 20 Eur. Apskaičiuokime gaminių kiekį, nuo kurio prasidės pelnas.

Sprendimas

Užrašykime pelno funkciją, kai $x < 1\ 000$:

$$P(x) = 20x - (15x + 10\ 000).$$

Iš nelygybės $P(x) > 0$ pagal (1.7.3) formulę, gauname $x > 2\ 000$. Taigi matome, kad pelno funkcijai reikia taikyti formulę

$$\begin{aligned} P(x) &= 20x - ((15 - \ln(x - 999))x + 10\ 000) \\ &= (5 + \ln(x - 999))x - 10\ 000 \end{aligned}$$

ir išspręsti nelygybę $P(x) > 0$.

Apskaičiuokime kelias funkcijos $P(x)$ reikšmes:

x	$P(x)$
1 000	$-5\ 000,00$
1 010	$-2\ 528,13$
1 020	$-1\ 794,59$
1 080	$146,01$

Matome, kad lygties $P(x) = 0$ sprendinys x_s priklauso intervalui nuo $x_1 = 1\ 020$ iki $x_2 = 1\ 080$, nes $P(x_1) < 0$ ir $P(x_2) > 0$.

Išspręskime šią lygtį apytiksliai, taikydami dalijimo pusiau (dichotomijos) metodą[5]. Apskaičiuokime funkcijos $P(x)$ reikšmę taške (atkarpos $[x_1, x_2]$ vidurio taške)

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1\ 020 + 1\ 080}{2} = 1\ 050.$$

[5] Daugiau apie apytikslius sprendimo metodus žr.:
Kvedaras B.; Sapagovas M. Skaičiavimo metodai. Vilnius: Mintis, 1974. 516 p.
Čiegis R.; Būda V. Skaičiuojamoji matematika. Vilnius: TEV, 1997. 221 p.
Plukas K. Skaitiniai metodai ir algoritmai. Kaunas: Naujasis laukas, 2000. 548 p.

Gauname $P(1\ 050) = -621{,}58$. Atkreipkime dėmesį, kad lygties sprendinys priklauso intervalui (x_3, x_2), nes šio intervalo galuose funkcija $P(x)$ įgyja skirtingų ženklų reikšmes. Taigi apskaičiuojame

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{1\ 050 + 1\ 080}{2} = 1\ 065$$

ir $P(1\ 065) = -213{,}02$. Konstruojame kitą artinį (visos reikšmės x_n sudaro skaičių seką, kuri artėja[6] prie lygties sprendinio x_s):

$$x_5 = \frac{x_4 + x_2}{2} = \frac{1\ 065 + 1\ 080}{2} = 1\ 072{,}5.$$

Apvalinkime $x_5 \approx 1\ 073$ (ieškome sveikojo gaminių skaičiaus x_s) ir apskaičiuokime $P(1\ 073) = -16{,}74$. Taigi

$$x_6 = \frac{x_5 + x_2}{2} = \frac{1\ 073 + 1\ 080}{2} = 1\ 076{,}5.$$

Dabar apvalinkime $x_6 \approx 1\ 076$ (svarbu neprarasti intervalo, kuriame pelno funkcija keičia ženklą!). Kadangi $P(1\ 076) = 53{,}93 > 0$, matome, kad pelno funkcijos reikšmė jau yra teigiama ir reikia imti intervalą (x_5, x_6):

$$x_7 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{1\ 073 + 1\ 076}{2} = 1\ 074{,}5.$$

Apvaliname $x_7 \approx 1\ 074$ ir apskaičiuojame $P(1\ 074) = 6{,}98$. Kadangi $P(1\ 073) < 0$ ir $P(1\ 074) > 0$, gauname, kad $x_s = 1\ 074$ yra minimalus gaminių skaičius, nuo kurio gamyba nebus nuostolinga.

Paklausos modeliavimas

Tam tikros prekės paklausa dažnai aprašoma šio pavidalo funkcijomis:

$$y(x) = \begin{cases} k\ \frac{x-a}{x-b}, & \text{kai } x > a, \\ 0, & \text{kai } x \leqslant a. \end{cases} \tag{1.7.4}$$

Čia x – pirkėjo pajamos per laiko vienetą (pavyzdžiui, per mėnesį), $y(x)$ – perkamų per tą patį laikotarpį nagrinėjamos prekės vienetų skaičius. Parametras k nurodo, kiek įsigyja šios prekės vienetų vartotojai, turintys neribotas pajamas (rašome: $x \to +\infty$). Galima keisti parametro k dimensiją. *Pavyzdžiui*, tai gali būti šimtas arba tūkstantis vienetų. Funkcijos parametrai a ir b yra skirtingi skirtingoms prekėms ir nurodo konkrečios prekės paklausos specifiką. Atkreipkime dėmesį, kad $a > b$ ir $a > 0$.

1.7.2 pavyzdys. Tarkime, kad maksimali paklausa ($k = 1\ 000$ vnt.) ir žinoma, kad namų ūkiai, turintys pajamas 3 000 Eur, vidutiniškai įsigyja 150 prekės vienetų, o turintys pajamas 4 000 Eur – 200 vnt. Raskime (1.7.4) funkcijos parametrus

[6] Šiuo atveju sakome, kad skaičių sekos x_n *riba* lygi x_s ir rašome: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_s$.

a, b ir apskaičiuokime namų ūkių, turinčių 5 000 Eur pajamas, šios prekės paklausą.

Sprendimas
Turime dvi žinomas (1.7.4) funkcijos reikšmes ir parametrą $k = 1\ 000$:

$$y(3\ 000) = 1\ 000\ \frac{3\ 000 - a}{3\ 000 - b} = 150,\ y(4\ 000) = 1\ 000\ \frac{4\ 000 - a}{4\ 000 - b} = 200.$$

Sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{3\ 000 - a}{3\ 000 - b} = 0,15, \\ \\ \frac{4\ 000 - a}{4\ 000 - b} = 0,20 \end{cases} \sim \begin{cases} 3\ 000 - a = 0,15\,(3\ 000 - b), \\ 4\ 000 - a = 0,20\,(4\ 000 - b). \end{cases}$$

Atimame iš antrosios lygties pirmąją:

$$4\ 000 - a - (3\ 000 - a) = 0,20\,(4\ 000 - b) - 0,15(3\ 000 - b).$$

Gauname

$$1\ 000 = 350 - 0,05b.$$

Iš čia $b = -13\ 000$ ir iš pirmosios (tą patį gautume ir iš antrosios) lygties gauname

$$-a = 0,15\,(3\ 000 - (-13\ 000)) - 3\ 000 = -600\ \Rightarrow a = 600.$$

Taigi gavome prekės paklausos (1.7.4) pavidalo funkciją

$$y(x) = \begin{cases} 1\ 000\frac{x - 600}{x + 13\ 000}, & \text{kai } x > 600, \\ 0, & \text{kai } x \leqslant 600. \end{cases}$$

Apskaičiuokime

$$y(5\ 000) = 1\ 000\ \frac{5\ 000 - 600}{5\ 000 + 13\ 000} \approx 244 \text{ (vnt.)}.$$

2. Ribos ir tolydumas

Raktiniai žodžiai: Skaičių seka. Funkcijos riba. Funkcijos ribos savybės. Ribų skaičiavimo taisyklės. Vienpusės ribos. Funkcijos tolydumas. Trūkio taškai.
Literatūra: [Būd08] 53–117 p.; [Pek05] 131–155 p.; [Rum76] XIV skyrius, 222–253 p.; [Mis99] 117–136 p.; [Stu08] 115–119 p.

2.1. Skaičių seka

Funkciją $f(n) = x_n$, su kuria kiekvienam natūraliajam skaičiui priskiriamas realusis skaičius, vadiname **skaičių seka**.

Reiškinys $f(n)$ vadinamas **bendruoju sekos nariu**, nes iš jo galima gauti bet kurį sekos narį $x_n = f(n)$ (čia n – nario numeris). Seką žymėsime simboliu $\{x_n\}$.
Pavyzdžiui,

1. Formulė $x_n = \frac{n}{n+1}$ apibrėžia seką

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = \frac{4}{5}, \ldots, x_n = \frac{n}{n+1}, \ldots$$

2. Formulė $x_n = (-1)^n$ apibrėžia seką

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1,\ ...\ ,\ x_n = (-1)^n,\ ...$$

3. Formulė $x_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ apibrėžia **aritmetinę progresiją**

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_1 + d,\ x_3 = a_1 + 2 \cdot d,\ ...,\ x_n = a_1 + d \cdot (n-1),\ ...$$

4. Formulė $x_n = b_1 q^{n-1}$ apibrėžia **geometrinę progresiją**

$$x_1 = b_1,\ x_2 = b_1 q,\ x_3 = b_1 q^2,\ ...,\ x_n = b_1 q^{n-1},\ ...$$

Skaičius a vadinamas **sekos** $\{x_n\}$ **riba**, kai kiekvieną teigiamą (kiek norima mažą) skaičių ε atitinka toks natūralusis skaičius N, kad su kiekvienu $n > N$ teisinga nelygybė $|x_n - a| < \varepsilon$.

Kai seka $\{x_n\}$ turi ribą skaičių a, tai rašome $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ arba $x_n \to a$, kai $n \to \infty$.

Baigtinę ribą turinti seka vadinama **konverguojančia**. Seka, neturinti baigtinės ribos, vadinama **diverguojančia**.

2.1.1 pavyzdys. Remdamiesi sekos apibrėžimu, įrodykite, kad sekos x_n, $x_n = \dfrac{n+1}{3n+7}$ riba lygi $\dfrac{1}{3}$. Raskite N, kai $\varepsilon = 0,001$.

Sprendimas

Kiekvienam teigiamam skaičiui ε reikia rasti tokį natūralųjį skaičių N, kad $\left|x_n - \dfrac{1}{3}\right| < \varepsilon$, kai $n > N$. Taigi

$$\left|\frac{n+1}{3n+7} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-4}{3\,(3n+7)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 3n > \frac{4}{3\varepsilon} - 7 \Leftrightarrow n > \frac{4}{9\varepsilon} - \frac{7}{3}.$$

Skaičius $N = \left[\dfrac{4}{9\varepsilon} - \dfrac{7}{3}\right]$ $\left(\left[\dfrac{4}{9\varepsilon} - \dfrac{7}{3}\right] - \text{sveikoji dalis } \dfrac{4}{9\varepsilon} - \dfrac{7}{3}\right)$. Taigi $\dfrac{1}{3}$ yra duotosios sekos riba.

Kai $\varepsilon = 0,001$, tuomet $N = \left[\dfrac{4000}{9} - \dfrac{7}{3}\right] = 442$.

Atsakymas. 442.

Sekos ribos geometrinė prasmė

Nelygybė

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

yra ekvivalenti nelygybei

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Skaičius a yra sekos $\{x_n\}$ riba, kai kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks numeris N, kad visi sekos nariai su didesniais numeriais priklauso intervalui

$$(a - \varepsilon; a + \varepsilon)\,,$$

kuris vadinamas **taško** a ε**-aplinka** ir žymimas $U_\varepsilon\,(a)$. Tuomet tos aplinkos išorėje bus tik baigtinis skaičius sekos narių.

Monotoninės sekos

- Seka $\{x_n\}$ vadinama **didėjančiąja**, kai su kiekviena n reikšme teisinga nelygybė

  $$x_{n+1} > x_n,$$

  t.y. kai didesnius narių numerius atitinka didesni sekos nariai.

- Seka $\{x_n\}$ vadinama **mažėjančiąja**, kai su kiekviena n reikšme teisinga nelygybė

  $$x_{n+1} < x_n.$$

- Kai $x_{n+1} \geqslant x_n$, turime **nemažėjančią** seką.

- Kai $x_{n+1} \leqslant x_n$, turime **nedidėjančią** seką.

Nemažėjančios ir nedidėjančios (kartu didėjančios ir mažėjančios) sekos vadinamos **monotoninėmis** sekomis.

Seka vadinama ***aprėžtąja***, kai visi jos nariai priklauso kuriam nors baigtiniam intervalui (m, M), taigi tenkina sąlygą $m < x_n < M$.

Pastabos

2.1.1. Neapibrėžtumais laikome: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0.

2.1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \begin{cases} 0, \ kai \quad |q| < 1, \\ \text{neapibr.}, \ kai \quad |q| = 1, \\ \infty, \ kai \quad |q| > 1. \end{cases}$

2.1.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^{\alpha}} = 0$, kai $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $\alpha > 0$.

2.1.2 pavyzdys. Raskime $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt{n} - 3n^2}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n^2 (n aukščiausio laipsnio), tuomet turime:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt{n} - 3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2\sqrt[3]{n}}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{\sqrt{n}}{n^2} - \frac{3n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - 3}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{5}{3}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$, tai gauname

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n^{\frac{5}{3}}} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - 3} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $-\dfrac{1}{3}$.

2.1.3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\sqrt[3]{n^2 + n} + \sqrt[4]{n + \sqrt{n}}}{\sqrt[6]{n} - 2\sqrt[6]{n^4} + \sqrt{n}}$.

Sprendimas

Kadangi turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš $n^{\frac{2}{3}}$ (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt[3]{n^2 + n} + \sqrt[4]{n + \sqrt{n}}}{\sqrt[6]{n} - 2\sqrt[6]{n^4} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4\sqrt[3]{n^2+n}}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt[4]{n+\sqrt{n}}}{n^{\frac{2}{3}}}}{\frac{\sqrt[6]{n}}{n^{\frac{2}{3}}} - \frac{2\sqrt[6]{n^4}}{n^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{2}{3}}}} =$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{\frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{n}^2}+\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}^2}}+\sqrt[4]{\frac{\mathrm{n}}{n^{\frac{8}{3}}}+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{8}{3}}}}}{\frac{\mathrm{n}^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{2}{3}}}-\frac{2\mathrm{n}^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}}}=\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{1+\frac{1}{\mathrm{n}}}+\sqrt[4]{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{n^{\frac{13}{6}}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}-2+\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{13}{6}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}=0$, tai turime

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{1+\frac{1}{\mathrm{n}}}+\sqrt[4]{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{n^{\frac{13}{6}}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}-2+\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}}=\frac{4\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[4]{0+0}}{0-2+0}=\frac{4}{-2}=-2.$$

Atsakymas. -2.

2.1.4 pavyzdys. Raskime $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš jungtinio reiškinio $n+\sqrt{n^2-4n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)\cdot\left(n+\sqrt{n^2-4n}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2-4n}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n^2-4n}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{4n}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}=0$, tai gauname

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{4}{2}=2.$$

Atsakymas. 2.

2.1.5 pavyzdys. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

<u>Sprendimas</u>

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš nepilnojo kvadrato $n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)\cdot\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}\right)}{\left(n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^3+n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}.
\end{aligned}$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n^2 (n aukščiausio laipsnio):

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n\cdot\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n^2}+\frac{\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}{n^2}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n}+\frac{\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}-\frac{n^2}{n^3}}+\sqrt[3]{\frac{\left(n^3-n^2\right)^2}{n^6}}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{n^6-2n^5+n^4}{n^6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{n^6}{n^6}-\frac{2n^5}{n^6}+\frac{n^4}{n^6}}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}.
\end{aligned}$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$,tai turime

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-0}+\sqrt[3]{1-0+0}}\\
&=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Atsakymas. $\frac{1}{3}$.

2.1.6 pavyzdys. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\right)$.

<u>Sprendimas</u>
Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš jungtinio

daugiklio $n+\sqrt{n^2+1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2-n^2-1\right)}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

Atsakymas. $-\dfrac{1}{2}$.

2.1.7 pavyzdys. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+(-2)^{n-1}}{(-3)^{n+1}+4}$.

Sprendimas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+(-2)^{n-1}}{(-3)^{n+1}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+(-2)^n\cdot(-2)^{-1}}{(-3)^n\cdot(-3)+4}.$$

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš $(-3)^n$, nes $|-3|>|-2|$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-3)^n}{(-3)^n}+\frac{(-2)^n}{(-3)^n}\cdot(-2)^{-1}}{\frac{(-3)^n}{(-3)^n}\cdot(-3)+\frac{4}{(-3)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot(-3)+\frac{4}{(-3)^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 1}{2\cdot\left(1\cdot(-3)+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}$$

Kadangi $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^n\to 0$, kai $n\to\infty$, tai

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot 1}{2\cdot\left(1\cdot(-3)+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}=\frac{2-0\cdot 1}{2\cdot(1\cdot(-3)+0)}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $-\frac{1}{3}$.

2.1.8 pavyzdys. Pažymėkime: $S(G)$ – nykstamosios geometrinės progresijos suma, $S_n(A)-n$ pirmųjų aritmetinės progresijos narių suma. Raskite ribą $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S(G)\cdot n^2}{S_n(A)}$, kai aritmetinė progresija: $6,\ 2,\ \ldots$, o geometrinė progresija: $12,\ -8,\ \ldots$.

Sprendimas

$$S(G) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{12}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{12}{\frac{3+2}{3}} = \frac{36}{5},$$

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 6 + (-4) \cdot (n-1)}{2} \cdot n \\ &= \frac{12 - 4 \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \frac{12n - 4 \cdot n^2 + 4n}{2} \\ &= 8n - 2n^2. \end{aligned}$$

Dabar gautus rezultatus įsirašome į duotąją ribą:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{36}{5} \cdot n^2}{8n - 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{36 \cdot n^2}{5 \cdot (8n - 2n^2)}.$$

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš n^2 (n aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{36 \cdot n^2}{5 \cdot (8n - 2n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{36 \cdot \frac{n^2}{n^2}}{40 \cdot \frac{n}{n^2} - 10 \cdot \frac{n^2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{36}{40 \cdot \frac{1}{n} - 10}.$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, tai turime

$$\lim_{n\to\infty} \frac{36}{40 \cdot \frac{1}{n} - 10} = \frac{36}{40 \cdot 0 - 10} = -\,3,6.$$

Atsakymas. $-\,3,6$.

2.4 testas

$\boxed{1}$ Apskaičiuokite skaičių sekos $x_n = \dfrac{-5n^2+1}{\sqrt{2916n^2+30n+3}}$ ribą .

① $\frac{4}{9}$; ② $-\frac{4}{9}$; ③ $\frac{5}{54}$; ④ $-\infty$; ⑤ 0; ⑥ $+\infty$; ⑦ $-\frac{5}{54}$.

$\boxed{2}$ Apskaičiuokite skaičių sekos

$$z_n = \frac{-32n^9 + 15n^8 - 13n^6 - 17n^5 + 8n}{-40n^6 - 16n^3 + 5n^2 + 5}$$ ribą .

① $\frac{2}{5}$; ② $+\infty$; ③ $\frac{4}{5}$; ④ $-\infty$; ⑤ $-\frac{4}{5}$; ⑥ $-\frac{2}{5}$; ⑦ 0.

$\boxed{3}$ Apskaičiuokite skaičių sekos $w_n = \dfrac{-4n+1}{\sqrt{400n^2+16n-1}}$ ribą .

① $+\infty$; ② $-\infty$; ③ 1; ④ -1; ⑤ $\frac{1}{5}$; ⑥ 0; ⑦ $-\frac{1}{5}$.

$\boxed{4}$ Apskaičiuokite skaičių sekos
$z_n = \dfrac{48n^6 - 19n^5 + 9n - 1}{60n^3 + n^2 - 4n}$ ribą .

① $-\frac{4}{5}$; ② 0; ③ $\frac{4}{5}$; ④ 1; ⑤ -1; ⑥ $+\infty$; ⑦ $-\infty$.

2.2. Funkcijos riba

Funkcijos ribos sąvoka ir savybės

Funkcijos ribos sąvoka yra sudėtinga, todėl pailiustruosime ją tokiu pavyzdžiu. Ištirkime, kokios yra funkcijos $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ reikšmės, kai x įgyja reikšmes iš taško $x = 3$ aplinkos:

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,9	5,99	5,999	neapibrėžta	6,001	6,01	6,1

Iš lentelės matyti, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės mažai skiriasi nuo skaičiaus 6, kai $x \in [2,9;\ 3,1]$. Tokiu atveju sakoma, kad **funkcijos** $f(x)$ **riba, kai** x **artėja prie 3, yra lygi** 6, o užrašoma $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ arba bendruoju atveju $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}} f(x) = \mathrm{A}$. Suformuluokime formalų apibrėžimą.

Apibrėžimas. (pagal Heine[7]) Skaičius A vadinamas funkcijos f riba taške a, jei kiekvienai argumento reikšmių sekai $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, kurios riba yra a, funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ turi ribą A.

Apibrėžimas. (pagal Koši[8]) Skaičius A vadinamas funkcijos f riba taške a, jei $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, kad $|f(x) - A| < \varepsilon$, kai $0 < |x - a| < \delta$ ir $x \in D_f$.

2.2.1 pavyzdys. Remdamiesi ribos apibrėžimu, įrodykite, kad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$$

Sprendimas

Pasirinkime bet kokį $\varepsilon > 0$ ir ieškosime $M > 0$, kad $\left|\dfrac{x^2}{x^2+1} - 1\right| < \varepsilon$, kai $x \in D_f$ ir $|x| > M$.

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1} - 1\right| = \left|\frac{x^2 - x^2 - 1}{x^2+1}\right| = \left|\frac{1}{x^2+1}\right| < \varepsilon$$

[7]Heinrich Eduard Heine (1821–1881) – vokiečių matematikas.
[8]Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – prancūzų matematikas.

Iš čia gauname:

$$\left|\frac{1}{x^2+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\left|\frac{1}{\varepsilon}-1\right|}.$$

Taigi kai $M = \sqrt{\left|\frac{1}{\varepsilon}-1\right|}$, iš nelygybės $|x| > M$ išplaukia nelygybė

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right| < \varepsilon,$$

t.y. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$. Pavyzdžiui, kai $\varepsilon = 0.01$, tai $M = \sqrt{99}$.

Nykstamieji dydžiai

Seka $\{\alpha_n\}$, kurios riba lygi nuliui, vadinama **nykstamuoju dydžiu**. Rašoma $\alpha_n \to 0$.

- Nykstamųjų dydžių suma, skirtumas ir sandauga – taip pat nykstamasis dydis.
- Nykstamojo ir aprėžtojo dydžių sandauga yra nykstamasis dydis.

Tam, kad būtų $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, yra būtina ir pakankama, kad:

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Čia $\alpha(x)$ yra nykstamasis dydis.

Įrodymas. Iš funkcijos ribos apibrėžimo turime

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

kai x pakankamai arti taško a. Pažymėję $f(x) - A = \alpha(x)$ ir įrašę į nelygybę, gausime:

$$|\alpha(x)| < \varepsilon,$$

kai x pakankamai arti taško A. Todėl

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0,$$

t. y. $\alpha(x)$ yra nykstamoji funcija, todėl funkciją $f(x)$ galima išreikšti:

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Tai yra būtinoji ribos egzistavimo sąlyga.
Jei funkciją galima išreikšti skaičiaus ir nykstamosios funkcijos suma

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ ir } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0,$$

tai pagal ribos apibrėžimą

$$|\alpha(x)| < \varepsilon$$

kai x pakankamai arti taško a. Todėl

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

kai x pakankamai arti taško a. Pagal ribos apibrėžimą

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Įrodėme ir pakankamąją ribos egzistavimo sąlygą. Teorema įrodyta.

Funkcijų ribų savybės
Sakykime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ turi *baigtines ribas*, kai $x \to a$. Tada

1. $\lim\limits_{x \to c} c = c$, c – konstanta;
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$, c – konstanta;
5. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, jei $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ ir $\forall x \in U_\delta(a)$ $g(x) \neq 0$.

2.2.2 pavyzdys. Raskite funkcijos ribą

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

<u>Sprendimas</u>
Įrašę į formulę $x = 2$:

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0},$$

t. y neapibrėžtumas, todėl skaitiklį ir vardiklį išskaidome dauginamaisiais. Suprastinę turime:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

2.2.3 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{2x^2-5x+2}$.

Sprendimas
Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, todėl surandame skaitiklio ir vardiklio trinarių šaknis ir, juos išskaidę dauginamaisiais, suprastiname:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+4)}{2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{2x-1}=\frac{2+4}{2\cdot 2-1}=2.$$

Atsakymas. 2.

2.2.4 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+2x+1}$.

Sprendimas
Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš x^2 (x aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, tai

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{3}$.

2.2.5 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Sprendimas
Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš jungtinio reškinio $x+\sqrt{x^2-4x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}.\end{aligned}$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš x (x aukščiausio laipsnio):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \frac{4}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Atsakymas. 2.

2.2.6 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-\left(\sqrt{3+x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{3-x-3-x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{-2}$$
$$= \frac{\sqrt{3-0}+\sqrt{3+0}}{-2} = -\sqrt{3}.$$

Atsakymas. $-\sqrt{3}$.

2.2.7 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+\sqrt{6+x}}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardikliui jungtinio daugiklio $x-\sqrt{6+x}$:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+\sqrt{6+x}} = \lim_{x\to -2} \frac{\left(x^3+8\right)\ \left(x-\sqrt{6+x}\right)}{\left(x+\sqrt{6+x}\right)\ \left(x-\sqrt{6+x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to -2} \frac{\left(x^3+8\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{x^2-6-x}.$$

Dar turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, todėl skaitiklį išskaidome pagal formulę $a^3+b^3 = (a+b)\ \left(a^2-ab+b^2\right)$, o suradę vardiklio trinario šaknis, išskaidome jį dauginamaisiais:

$$\lim_{x\to -2} \frac{\left(x^3+8\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{x^2-6-x} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{(x+2)(x-3)}.$$

Suprastinę gauname:

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{(x-3)}.$$

Dabar jau galime apskaičiuoti ribą:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(x^2-2x+4\right)\left(x-\sqrt{6+x}\right)}{(x-3)}=\frac{\Big((-2)^2-2\cdot(-2)+4\Big)\left(-2-\sqrt{6-2}\right)}{(-2-3)}$$
$$=\frac{(4+4+4)\cdot(-4)}{-5}=\frac{-48}{-5}=\frac{48}{5}.$$

Atsakymas. $\frac{48}{5}$.

2.2.8 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x+\sqrt[3]{2-5x}}$.

<u>Sprendimas</u>
Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $x+\sqrt{x+2}$, ir vardikliui $-\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x+\sqrt[3]{2-5x}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{\left(x+\sqrt[3]{2-5x}\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{\left(x^3+2-5x\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}.$$

Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, todėl suradę skaitiklio trinario šaknis, išskaidome dauginamaisiais, o vardiklį (t. y. x^3+2-5x) „daliname kampu“ iš $x-2$, nes $x\to 2$, ir išskaidome dauginamaisiais.

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3-5x+2 & x-2 \\
 & x^3-2x^2 & \overline{x^2+2x-1} \\ \hline
- & 2x^2-5x+2 & \\
 & 2x^2-4x & \\ \hline
- & -x+2 & \\
 & -x+2 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Daugianariai išsiskaido taip: $x^3+2-5x=(x-2)\left(x^2+2x-1\right)$ ir $x^2-x-2=$

$(x-2)(x+1)$. Įrašę gautąsias išraiškas į ribą, turime

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{\left(x^3+2-5x\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{(x-2)\left(x^2+2x-1\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}.$$

Suprastiname ir apskaičiuojame ribą:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{(x-2)\left(x^2+2x-1\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\left(x^2-x\cdot\sqrt[3]{2-5x}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)}{\left(x^2+2x-1\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$=\frac{(2+1)\cdot(4+4+4)}{(4+4-1)\cdot(2+2)}=\frac{3\cdot 12}{7\cdot 4}=\frac{9}{7}.$$

Atsakymas. $\dfrac{9}{7}$.

2.2.9 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{2x+1}}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $x^2+\sqrt{x+2}$ ir vardikliui – $\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{2x+1}}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x-\sqrt[3]{2x+1}\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^4-x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^3-2x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)},$$

turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį (t. y. x^4-x-2 ir x^3-2x-1) „daliname kampu“ iš $x+1$, nes $x\to -1$.

Daliname daugianarį x^4-x-2 iš daugianario $x+1$ ir daugianarį x^3-2x-1 iš daugianario $x+1$ (t.y. taip, kaip skaičius).

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^4-x-2 & x+1 \\
 & x^4+x^3 & \overline{x^3-x^2+x-2} \\ \hline
- & -x^3-x-2 & \\
 & -x^3-x^2 & \\ \hline
- & x^2-x-2 & \\
 & x^2+x & \\ \hline
- & -2x-2 & \\
 & -2x-2 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl|l}
- & x^3-2x-1 & x+1 \\
 & x^3+x^2 & \overline{x^2-x-1} \\ \hline
- & -x^2-2x-1 & \\
 & -x^2-x & \\ \hline
- & -x-1 & \\
 & -x-1 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Daugianariai išsiskaido dauginamaisiais: $x^4-x-2=(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)$ ir $x^3-2x-1=(x+1)\left(x^2-x-1\right)$. Įrašę gautąsias išraiškas į ribą, turime

$$
\lim_{x\to-1}\frac{\left(x^4-x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^3-2x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}
$$

$$
=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{(x+1)\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}.
$$

Suprastinę turime:

$$
\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{(x+1)\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}
$$

$$
=\lim_{x\to-1}\frac{\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}.
$$

Dabar apskaičiuojame ribą:

$$
\lim_{x\to-1}\frac{\left(x^3-x^2+x-2\right)\left(x^2+x\cdot\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)}
$$

$$
=\frac{(-1-1-1-2)\cdot(1-1\cdot(-1)+1)}{(1+1-1)\cdot\left(1+\sqrt{-1+2}\right)}=\frac{(-5)\cdot 3}{1\cdot 2}=-\frac{15}{2}.
$$

Atsakymas. $-\dfrac{15}{2}$.

2.2.10 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right)$.

Sprendimas

I būdas

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-4x^2+4}{\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+5}{\left(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-1}\right)}.
\end{aligned}$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą, tai iškeliame x^2 prieš skliaustus skaitiklyje ir vardiklyje (atkreipiame dėmesį į x ženklą, nes $x\to-\infty$):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}.
\end{aligned}$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}=0$, tai turime

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-3+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}&=\frac{-\infty\cdot(-3+0)}{(-1-2)}=\frac{-\infty\cdot(-3)}{(-3)}\\
&=-\infty\cdot 1=-\infty.
\end{aligned}$$

Atsakymas. $-\infty$.

II būdas

Kadangi $x\to-\infty$ ir norime iškelti x^2 prieš kvadratinės šaknies ženklą, turime atkreipti dėmesį į ženklą. Vienas iš būdų yra $-\infty$ pakeisti į $+\infty$, todėl pažymėkime kintamąjį $x=-t$, $t=-x$, kai $t=+\infty$, tuomet gauname:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x^2-1}\right)&=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{(-t)^2+1}-2\sqrt{(-t)^2-1}\right)\\
&=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+1}-2\sqrt{t^2-1}\right),
\end{aligned}$$

o dabar iškeliame t prieš kvadratinės šaknies ženklą:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+1}-2\sqrt{t^2-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-2t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right).$$

Kadangi $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0$, tai turime

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-t\cdot\left(-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)\right)=-\infty\cdot(-1+2)=-\infty.$$

Atsakymas. $-\infty$.

2.2.11 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x}}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Iškeliame x prieš skliaustus skaitiklyje ir vardiklyje:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}.$$

Kadangi $x\to+\infty$, tai $|x|=x$.

Vadinasi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}$.

Kadangi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$, tai turime

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Atsakymas. 1.

2.2.12 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{16x^2-2}+4x}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš skaitikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{x^2+14}-x$ ir vardikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{16x^2-2}-4x$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{16x^2-2}+4x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+14}+x\right)\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)}{\left(\sqrt{16x^2-2}+4x\right)\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+14-x^2\right)\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)}{\left(16x^2-2-16x^2\right)\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(\sqrt{16x^2-2}-4x\right)}{-2\cdot\left(\sqrt{x^2+14}-x\right)}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą, tai iškeliame x prieš skliaustus skaitiklyje ir vardiklyje (atkreipiame dėmesį į x ženklą, nes $x\to-\infty$):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(\sqrt{x^2\left(16-\frac{2}{x^2}\right)}-4x\right)}{-2\cdot\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{14}{x^2}\right)}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(|x|\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}-4x\right)}{-2\cdot\left(|x|\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}-x\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(-x\cdot\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}-4x\right)}{-2\cdot\left(-x\cdot\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot(-x)\ \left(\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}+4\right)}{-2\cdot(-x)\ \left(\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1\right)}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{14}{x^2}=0$, tai turime

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{14\cdot\left(\sqrt{16-\frac{2}{x^2}}+4\right)}{-2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{14}{x^2}}+1\right)}=\frac{14\cdot(4+4)}{-2\cdot(1+1)}=-\frac{7\cdot 8}{2}=-\ (7\cdot 4)=-\ 28.$$

Atsakymas. $-\ 28$.

2.5 testas

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+6x+5}{x^2+11x+30}=$

① $-\frac{52}{19}$; ② $\frac{6}{11}$; ③ $-\frac{4}{11}$; ④ ∞; ⑤ $-\frac{20}{19}$; ⑥ 0; ⑦ $-\frac{68}{13}$; ⑧ -4.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+7x+12}{x^2+12x+27}=$

① $\frac{7}{12}$; ② 0; ③ $\frac{1}{12}$; ④ $\frac{13}{114}$; ⑤ $\frac{1}{6}$; ⑥ $\frac{7}{6}$; ⑦ $\frac{5}{114}$; ⑧ ∞; ⑨ $\frac{17}{78}$.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x^{50}-25}{40x^{50}-32}=$

① $-\frac{2}{5}$; ② $-\frac{5}{4}$; ③ $\frac{8}{5}$; ④ $-\frac{8}{5}$; ⑤ $\frac{5}{2}$; ⑥ 0; ⑦ $\frac{2}{5}$; ⑧ ∞; ⑨ $\frac{5}{4}$.

4 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{5}} \dfrac{10x^2-86x+48}{10x-6} =$

① $-\frac{5}{37}$; ② 0; ③ 1; ④ $-\frac{37}{5}$; ⑤ riba neegzistuoja; ⑥ ∞; ⑦ 10.

5 $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+4x+3}{-4x-4} =$

① ∞; ② riba neegzistuoja; ③ 1; ④ -2; ⑤ $-\frac{1}{2}$; ⑥ 0; ⑦ -4; ⑧ $-\frac{1}{4}$.

6 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{30x^2+2}{20x^2+22x+27} =$

① 30; ② 1; ③ 0; ④ $\frac{3}{2}$; ⑤ $\frac{2}{27}$; ⑥ $\frac{2}{3}$; ⑦ riba neegzistuoja; ⑧ ∞.

7 $\lim\limits_{x\to28} \dfrac{\sqrt{21x+20}-17}{x-28} =$

① riba neegzistuoja; ② $\sqrt{20}$; ③ 1; ④ 0; ⑤ $\sqrt{21}$; ⑥ $\frac{17}{28}$; ⑦ $-\frac{17}{28}$; ⑧ ∞.

8 $\lim\limits_{x\to14} \dfrac{\sqrt{53x-742}+13}{x+1} =$

① riba neegzistuoja; ② $\frac{13}{15}$; ③ 1; ④ ∞; ⑤ 13; ⑥ -13; ⑦ $\sqrt{742}$; ⑧ 0.

Duota funkcija $f(x)=\frac{x^3-9x^2+20x-12}{x^2-10x+24}$.

9 $\lim\limits_{x\to6} f(x)$

① $\frac{1}{37}$; ② ∞; ③ 2; ④ $\frac{20}{11}$; ⑤ $\frac{28}{5}$; ⑥ 10; ⑦ 111 ; ⑧ 0.

10 $\lim\limits_{x\to4} f(x)$

① 10; ② ∞; ③ $\frac{28}{5}$; ④ 2; ⑤ $\frac{20}{11}$; ⑥ 111 ; ⑦ 0; ⑧ $\frac{24}{1111}$.

11 $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

① 2; ② $\frac{8}{259}$; ③ $\frac{28}{5}$; ④ ; ⑤ 0; ⑥ 10; ⑦ ∞; ⑧ $\frac{20}{11}$.

2.3. Pagrindinės ribos

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e}$ arba $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$

Imkime

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \text{ kai } x\to+\infty,$$

ir sudarykime jos reikšmių lentelę:

x	1	5	100	1 000	10 000	100 000
$y(x)$	2	2,488320	2,704814	2,716923	2,718146	2,718268

Iš to galima padaryti prielaidą, kad $y(x)$ reikšmės priklauso intervalui $(2;3)$. Ši prielaida yra teisinga ir duotosios ribos įrodymus galime rasti išsamesniuose matematinės analizės vadovėliuose. Šios funkcijos riba skaičius e yra iracionalusis, o jo reikšmė apytiksliai lygi

$$2,718281828459045\ldots.$$

Dažnai vartojama rodiklinė funkcija, kurios pagrindas yra e, t. y. $y=e^x$, taip pat logaritminė funkcija, kurios pagrindas yra lygus e, t. y. $y=\log_e x$. Ši funkcija vadinama **natūraliuoju logaritmu** ir žymima $y=\ln\, x$.

I sprendimo būdas

2.3.1 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2=e^2.$$

Atsakymas. e^2.

2.3.2 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

Sprendimas

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot(-1)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1}$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1}=e^{-1}.$$

Atsakymas. e^{-1}.

2.3.3 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$.

<u>Sprendimas</u>
$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{3x}\cdot 3} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 6} = e^6$.

Atsakymas. e^6.

2.3.4 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$

<u>Sprendimas</u>
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\alpha} = e^{\alpha}$.

Atsakymas. e^{α}.

II sprendimo būdas
Kai turime neapibrėžtumą 1^∞, tai taikome formulę

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)},$$

kai a gali būti baigtinis $a \in R$ arba begalinis $\pm\infty$.

Teorema. Jei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, tai

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{B\ln A} = A^B.$$

Pastaba. Jei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, tai $(f(x))^{g(x)}$ riba ieškoma taip:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} &= \lim_{x\to a}(1+f(x)-1)^{g(x)}\\ &= \lim_{x\to a}\left[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)[f(x)-1]}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}.\end{aligned}$$

2.3.5 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.

<u>Sprendimas</u>
Turime neapibrėžtumą 1^∞, nes

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1,$$

o $\lim\limits_{x\to\infty}(2-3x)=\infty$. Todėl
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}-1\right)\cdot(2-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1-x}{x}\right)\cdot(2-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\cdot(2-3x)}$.
Atlikę veiksmus, gauname:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)(2-3x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}+3\right)}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$, tai $e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}+3\right)}=e^3$.

Atsakymas. e^3.

2.3.6 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x$.

Sprendimas
Turime neapibrėžtumą 1^∞, nes $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)=1$, o $\lim\limits_{x\to\infty}(x)=\infty$. Todėl

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}-1\right)\cdot x\right]}=e^\alpha.$$

Atsakymas. e^α.

2.3.7 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

Sprendimas
Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{1}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$, turime neapibrėžtumą 1^∞. Todėl

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2-2}\right)x^2}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}=e^{\frac{3}{1-0}}=e^3.$$

Atsakymas. e^3.

2.3.8 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+2}\right)^{x-3}$.

Sprendimas
Turime neapibrėžtumą 1^∞, nes

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\frac{3-0}{3+0}=1,$$

o $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)=\infty$. Todėl

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{x-3} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}-1\right)(x-3)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5-3x-2}{3x+2}\right)(x-3)}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7}{3x+2}\right)(x-3)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7x+21}{3x+2}\right)}.$$

Dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Todėl

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-7x+21}{3x+2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-7+\frac{21}{x}\right)}{x\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(-7+\frac{21}{x}\right)}{\left(3+\frac{2}{x}\right)}}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{21}{x} = 0$, tai

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(-7+\frac{21}{x}\right)}{\left(3+\frac{2}{x}\right)}} = e^{\frac{(-7+0)}{(3+0)}} = e^{-\frac{7}{3}}.$$

Atsakymas. $e^{-\frac{7}{3}}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \text{ arba } \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.}$$

Šių ribų įrodymus galime surasti išsamesniuose matematinės analizės vadovėliuose (pavyzdžiui, [Rum76], [Pek05]).

Pastaba

Be to, yra teisingos šios formulės, jei vietoj x paimsime funkciją $y(x)$, t. y. $\lim\limits_{y(x)\to 0}\frac{\sin y(x)}{y(x)} = 1$, $\lim\limits_{y(x)\to 0}\frac{y(x)}{\sin y(x)} = 1$.

2.3.9 pavyzdys. Raskite funkcijos ribą $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$.

<u>Sprendimas</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{4} = 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Atsakymas. $\frac{3}{4}$.

2.3.10 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$.

<u>Sprendimas</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x} = \frac{1\cdot 4}{1\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Atsakymas. $\frac{4}{5}$.

2.3.11 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

Sprendimas

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{2x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}}{x\cdot x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\frac{4}{25}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{25}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}\cdot\frac{25}{4}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2\cdot\frac{25}{4} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2 = 1^2\cdot\frac{25}{4} = \frac{25}{4}.\end{aligned}$$

Atsakymas. $\dfrac{25}{4}$.

2.3.12 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{2x^2}$.

Sprendimas

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{\frac{x^2}{16}\cdot 16\cdot 2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{32} = \left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{32} = 1^2\cdot\frac{1}{32}.$

Atsakymas. $\dfrac{1}{32}$.

2.3.13 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0} x\ \mathrm{ctg}\,3x$.

Sprendimas

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x\ \mathrm{ctg}\,3x &= \lim_{x\to 0} x\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos 3x}{3}\cdot\frac{3}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{3} = \frac{\cos 0}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{3}$.

2.3.14 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$.

Sprendimas

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha} &= \lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}}{x-\alpha} = \lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}}{2\cdot\frac{x-\alpha}{2}}\\ &= \lim_{x\to a}\cos\frac{x+\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha+\alpha}{2} = \cos\frac{2\alpha}{2} = \cos\alpha.\end{aligned}$$

Atsakymas. $\cos\alpha$.

2.3.15 pavyzdys sprendžiamas taikant formules

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)} \text{ ir } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

2.3.15 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 0}\ (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

<u>Sprendimas</u>
Turime neapibrėžtumą 1^∞, nes $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos x = 1$, o $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$. Sprendžiame remdamiesi formule $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\ (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}.$$

Kad būtų patogiau, e laipsnio ribą skaičiuosime atskirai:

$$\lim_{x\to 0}\ (\cos x - 1)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Kadangi dar turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, tai pasinaudojame trigonometrine formule $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ ir riba $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\ (\cos x - 1)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\ \left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\ \left(-2\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\ \left(-2\cdot 1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Atlikę veiksmus, gauname:

$$\lim_{x\to 0}\ \left(-2\cdot 1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot x^2}{4x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Nepamirškime, kad apskaičiavome e laipsnio ribą, todėl

$$\lim_{x\to 0}\ (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

2.6 testas

1 $\lim\limits_{q\to 0}\dfrac{19q}{\sin(49q)} =$

① $\dfrac{51}{49}$; ② $\dfrac{49}{51}$; ③ $\dfrac{49}{19}$; ④ $\dfrac{49}{18}$; ⑤ $\dfrac{18}{49}$; ⑥ $\dfrac{19}{49}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}(1+27x)^{\frac{21}{x}} =$

① ∞; ② $\frac{164}{27}$; ③ $e^{-\frac{9}{7}}$; ④ 0; ⑤ $e^{\frac{7}{9}}$;
⑥ π^{27}; ⑦ $e^{-\frac{259}{3}}$; ⑧ e^{567}; ⑨ e; ⓪ 2352.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(19x)}{\sin(23x)} =$

① π; ② $\frac{138}{19}$; ③ 0; ④ $\frac{23}{19}$; ⑤ $\frac{19}{23}$;
⑥ $-\frac{19}{23}$; ⑦ $-\frac{69}{19}$; ⑧ ∞; ⑨ $\pi\frac{19}{46}$; ⓪ $-\frac{23}{19}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 54x}{\sin 16x} =$

① 16; ② ∞;
③ $-\frac{8}{27}$; ④ 54;
⑤ 1; ⑥ 0;
⑦ riba neegzistuoja; ⑧ $\frac{27}{8}$.

5 $\lim\limits_{v\to +\infty}\left(-\dfrac{12v+2}{4-17v}\right)^{8v-21} =$

① e^4 ; ② 1; ③ 0; ④ $\frac{1}{e^4}$; ⑤ $+\infty$; ⑥ $\frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$; ⑦ $\sqrt[3]{e^4}$.

2.4. Vienpusės ribos

Kai nagrinėjama funkcijos $f(x)$ riba taške a, kintamasis x įgyja reikšmes ir iš kairės, ir iš dešinės nuo taško a. Jeigu ieškant ribos, kai $x \to a$, apsiribojama x reikšmėmis, kurios yra tik į kairę (arba tik į dešinę) nuo taško a, tai tokia riba vadinama **funkcijos riba iš kairės (dešinės)** ir žymima:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0)\,, x < a,$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0)\,, x > a.$$

Funkcijos ribos iš kairės ir iš dešinės vadinamos **vienpusėmis ribomis**.

Kai funkcija $f\left(x\right)$ taške a turi ribą, tai vienpusės ribos yra lygios tarpusavyje ir lygios funkcijos ribai:

$$\lim_{x\to a-0} f\left(x\right) = \lim_{x\to a+0} f\left(x\right) = \lim_{x\to a} f\left(x\right).$$

2.4.1 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{3x-1}{x-1}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3\cdot 1-1}{1-0-1} = \frac{2}{-0} = -\infty.$$

Atsakymas. $-\infty$.

2.4.2 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{3x-1}{x-1}$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3\cdot 1-1}{1+0-1} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

Atsakymas. $+\infty$.

2.4.3 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 1-0} \left(\dfrac{3x}{x-1} + 3x\right)$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 1-0} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x\right) = \frac{3}{-0} + 3 = -\infty.$$

Atsakymas. $-\infty$.

2.4.4 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to 1+0} \left(\dfrac{3x}{x-1} + 3x\right)$.

Sprendimas

$$\lim_{x\to 1+0} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x\right) = \frac{3}{+0} + 3 = +\infty.$$

Atsakymas. $+\infty$.

2.5. Funkcijos tolydumas. Trūkių rūšys

Funkcija $y = f(x)$ vadinama **tolydžiąja** taške $a \in X$, jei ji apibrėžta šiame taške bei jo aplinkoje, ir egzistuoja riba $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, kuri sutampa su funkcijos f reikšme taške a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Sakoma, kad funkcija f yra tolydi taške a

- **iš kairės**, jei $f(a-) = f(a)$, t. y. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$;
- **iš dešinės**, jei $f(a+) = f(a)$, t. y. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Funkcija vadinama **tolydžiąja intervale**, jei visuose to intervalo taškuose ji yra tolydi.

Jeigu kažkuriame taške funkcija f nėra tolydi, tai tas taškas vadinamas f **trūkio tašku**.

- Taškas a vadinamas funkcijos $y = f(x)$ **pirmosios rūšies** trūkio tašku, jeigu egzistuoja baigtinės ribos iš kairės ir iš dešinės:

  $$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a-0), \quad \lim_{x \to a+} f(x) = f(a+0),$$

  bet jos nėra tarpusavyje lygios: $f(a-0) \neq f(a+0)$.
- Kai bent viena vienpusė funkcijos $y = f(x)$ riba taške a neegzistuoja arba yra begalinė, tai taškas a vadinamas šios funkcijos **antrosios rūšies** trūkio tašku.
- Taškas a vadinamas funkcijos $y = f(x)$ **pašalinamuoju** trūkio tašku, jei vienpusės funkcijos ribos yra lygios $f(a-0) = f(a+0)$, tačiau bent viena iš jų nelygi funkcijos reikšmei $f(a)$, arba funkcija neapibrėžta taške a.

2.5.1 pavyzdys. Pasirinkime skaičių a taip, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$$

būtų tolydi, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

Sprendimas

Kai $x \neq 0$, funkcija $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$ yra tolydi kaip elementarioji funkcija.

Kai $x = 0$, skaičiuojame vienpuses ribas (šiuo atveju jos lygios, nes egzistuoja riba $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$):

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Gauname $f(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} a = a$; $f(0-) = \lim\limits_{x\to 0-} a = a$. Taigi ši funkcija tolydi, kai $a = 2$.

Atsakymas. Funkcija tolydi, kai $a = 2$.

2.7 testas

1	Funkcija $g(x) = \begin{cases} -24, & \text{kai } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{kai } x \neq 0 \end{cases}$ ______ tolydi taške $x = 0$; šis taškas yra jos ______ trūkis. ① CD; ② AD; ③ AB; ④ CB.	A yra B pirmosios rūšies C nėra D pašalinamasis
2	Kiek trūkio taškų turi funkcija? $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(7x)}{x-5}, & \text{kai } x < 0, \\ 7 - 4x, & \text{kai } x \in [0, 1], \\ -3\cos\dfrac{\pi x}{1}, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$	① du; ② nė vieno; ③ be galo daug; ④ tris; ⑤ vieną.
3	Su kuriomis parametrų A ir B reikšmėmis funkcija $f(x)$ yra tolydi $\forall x \in \mathbb{R}$? $f(x) = \begin{cases} 3 + \sin\dfrac{8}{x}, & \text{kai } x < 0, \\ Ax + B, & \text{kai } x \in [0, 2], \\ -9\sin\dfrac{\pi x}{4}, & \text{kai } x > 2. \end{cases}$	① $A = -\frac{13}{2}$, $B = 4$; ② $A = -6$, $B = 3$; ③ $A = -\frac{5}{2}$, $B = -4$; ④ $A = -3$, $B = -3$; ⑤ tokių reikšmių nėra.

2.6. Savarankiško darbo užduotys

2.1 užduotis

Apskaičiuokite ribas:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n(A)}{n^2\cdot S_n(G)}$, kai $AP: 7,\ 2,\ ...,\ GP: 15,\ -5,\ ...,$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}+(-6)^{n+1}}{(-6)^{n-1}+(-2)^{n-2}}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-5n+1}{4-n^2-2n^3}$, **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n^4}{2+n+3n^2}$, **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}+5n}{(3n+2)^2}$, **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+1}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[5]{n^5+n}-\sqrt[3]{n}}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

2.2 užduotis

Apskaičiuokite šias funkcijų ribas:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$, **b)** $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+\sqrt[3]{3-8x}}{x+\sqrt{6-x}}$, **c)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$, **d)** $\lim\limits_{n\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$,
e) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$, **f)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$, **g)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$, **h)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$,
i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, **j)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{x}$, **k)** $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$, **l)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\sin x}{1-\operatorname{tg}x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 4x}$.

2.3 užduotis

Apskaičiuokite šias funkcijų ribas:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$, **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, **d)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{6x}$,
e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$, **f)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}$, **g)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{2x^2}$, **h*)** $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 3x}$.

2.4 užduotis

Apskaičiuokite šias ribas:

a) $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{x-2}{x-1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{3x}{x-1}$, **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+14}+x}{\sqrt{16x^2-2}+4x}$,
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+6x-1}\right)$, **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x}}$,
f) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$, **g)** $\lim\limits_{x\to-0}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)$.

3. Funkcijos išvestinė ir diferencialas

Raktiniai žodžiai: Funkcijos išvestinė. Dalmens išvestinė. Sudėtinės funkcijos išvestinė. Liopitalio taisyklė. Funkcijos diferencialas. Diferencialo taikymas apytiksliams skaičiavimams. Teiloro formulė.
Literatūra: [Apy01] II skyrius, 47–60 p.; [Būd08] 118–140 p.; [Pek05] VII skyrius, 158–182 p.; [Rum76] XVI–XVIII skyriai, 263–285 p., 311–314 p., 317–329 p.

3.1. Funkcijos išvestinės apibrėžimas

Funkcijos $y = f(x)$ *išvestine* taške $x = a$ vadinama riba:

$$y' = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \tag{3.1.5}$$

Priminkime, kad Δx vadinamas argumento pokyčių taške a,
$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ – funkcijos pokyčiu tame taške.

Jeigu funkcija $f(x)$ turi išvestinę visuose kurio nors intervalo taškuose, tai sakoma, kad ji *diferencijuojama* tame intervale, o išvestinės radimo veiksmas vadinamas *diferencijavimu.*
Jei riba (3.12.6) neegzistuoja, sakoma, kad funkcija išvestinės taške neturi (nediferencijuojama).

3.2. Funkcijos išvestinės geometrinė prasmė

Kreivėje l per taškus M_0 ir M nubrėžiame kirstinę M_0M. Kai taškas M, judėdamas kreive l, artėja prie taško M_0, kirstinė M_0M artėja prie tiesės M_0L (žr. 3.2.1 pav.).

Ribinė kirstinės M_0M padėtis, kurią užima kreivės kirstinė M_0M, kai taškas M kreive artėja prie M_0, vadinama tos **kreivės liestine** taške M_0.

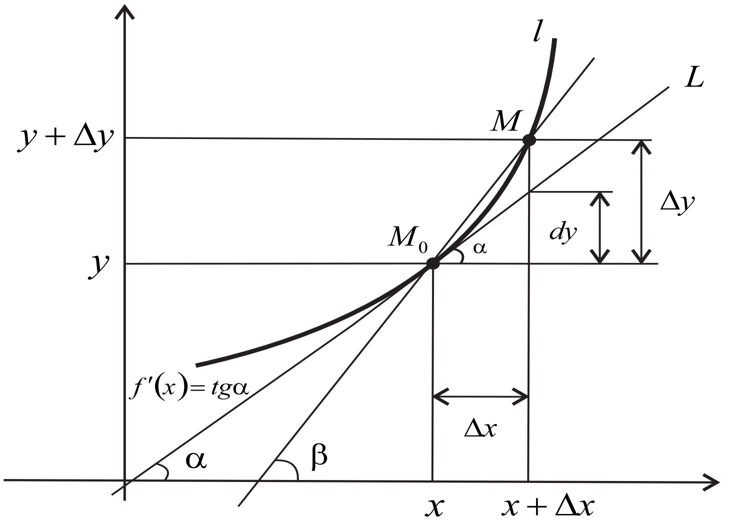
Tarkime, kad kreivė l yra funkcijos $y = f(x)$ grafikas. Iš 3.2.1 paveikslo matome, kad santykis $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ lygus kampo β tangentui:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

čia β – kampas, kurį kirstinė sudaro su teigiamąja Ox ašies kryptimi. Liestinė su teigiamąja ašies Ox kryptimi sudaro kampą α.

Taškas M, judėdamas funkcijos $y = f(x)$ grafiku, artėja prie taško M_0. Tada Δx artėja prie nulio, o kirstinė M_0M – prie liestinės ($\beta \to \alpha$). Taigi

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta\to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$



3.2.1 pav. Funkcijos išvestinės geometrinė prasmė

Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės taške $M_0(x_0, f(x_0))$ krypties koeficientas k lygus $f'(x_0)$.

Kreivės liestinės, einačios per tašką M_0, kurios krypties koeficientas $k = f'(x_0)$, lygtis yra

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

3.2.1 pavyzdys. Remdamiesi apibrėžimu, apskaičiuosime funkcijos $\sqrt[3]{x}$ išvestinę taške x.

<u>Sprendimas</u>
Pagal išvestinės apibrėžimą turime

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}.$$

Padauginkime skaitiklį ir vardiklį iš $\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$, skaitiklyje pritaikome formulę $(a-b)\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)=a^3-b^3$:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}.$$

Atlikę aritmetinius veiksmus ir suprastinę skaitiklį ir vardiklį iš Δx, gauname

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}.$$

Įrašome skaitiklyje vietoj Δx nulį ir užrašome atsakymą

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

3.3. Išvestinės mechaninė prasmė

Materialaus taško judėjimas laikomas visiškai apibrėžtu, jei yra žinoma judėjimą aprašanti funkcija $S=f(t)$. Ši lygtis leidžia nustatyti nueitą kelią bet kuriuo laiko momentu t. Pasirinkime laiko momentą $t=t_0$ ir apskaičiuokime nueitą kelią $S_0=f(t_0)$. Po laikotarpio Δt (laiko momentu $t=t_0+\Delta t$) nueitas kelias:

$$f(t_0)+\Delta S=f(t_0+\Delta t).$$

Iš čia gauname, kad

$$\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

Materialaus taško vidutinis greitis per laiko tarpą Δt bus santykis

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Judančio taško greičiu V laiko momentu t_0, arba momentiniu greičiu V, vadinama riba, prie kurios artėja $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ (vidutinis greitis), kai Δt artėja prie nulio:

$$\boxed{V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0) .}$$

Pagreičiu vadinama greičio pokyčio ir laiko pokyčio santykio riba, kai laiko pokytis artėja prie nulio:

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'(t_0) .}$$

3.4. Išvestinės ekonominė prasmė. Ribinės pajamos ir sąnaudos

Vidutinės bendrosios pajamos – tai gaminio vieneto pajamos, esant tam tikram gamybos lygiui x_0:

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \frac{P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)}{\Delta x},$$

kur P – pajamos, x – produkcijos kiekis, Δx – produkcijos kiekio pokytis.
Vidutinės bendrosios pajamos rodo vidutinį pajamų kitimo greitį, t. y. pajamų kitimą, kintant gamybos apimčiai nuo kiekio x_0 iki kiekio x.
Ribinės pajamos – pajamų pokytis ΔP, kurį lemia mažas produkcijos kiekio pokytis Δx, esant gamybos lygiui x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)}{\Delta x}.$$

Ribinės pajamos rodo bendrųjų pajamų kitimą, nežymiai pakitus gamybos apimčiai. Jeigu, *pavyzdžiui*, padidinus gamybos apimtį, ribinės pajamos yra teigiamas (neigiamas) skaičius, tai pajamos didėja (mažėja). Jei ribinės pajamos lygios nuliui, tai pajamos nedidėja.
Vidutinės sąnaudos – gaminio vieneto sąnaudos, esant gamybos lygiui x_0:

$$\frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = \frac{S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)}{\Delta x},$$

kur S – sąnaudos, x – produkcijos kiekis, Δx – produkcijos kiekio pokytis.
Vidutinės sąnaudos rodo vidutinį gamybos sąnaudų kitimo greitį, t.y. rodo sąnaudų kitimą, kintant gamybos apimčiai nuo kiekio x_0 iki kiekio x.
Ribinės sąnaudos – bendrųjų sąnaudų pokytis ΔS, kurį lemia mažas produkcijos kiekio pokytis Δx, esant gamybos lygiui x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)}{\Delta x}.$$

3.5. Elementariųjų funkcijų išvestinių lentelė

Pagrindinės diferencijavimo taisyklės:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

$\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot (f(x))'$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$;

Elementariųjų funkcijų išvestinės:

$c' = 0$; $x' = 1$;

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$(e^x)' = e^x, e = 2,71828\ldots$; $(a^x)' = a^x \ln a$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Išvestinių skaičiavimo taisykles galima įrodyti, remiantis išvestinės apibrėžimu. Tarkime, kad funkcijų $u(x)$ ir $v(x)$ išvestinės egzistuoja. Tuomet, *pavyzdžiui*, $(u(x) + v(x))'$ išvestinė taške x lygi:

$$(u(x) + v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right).$$

Kadangi funkcijų $u(x)$ ir $v(x)$ išvestinės egzistuoja, tai egzistuoja ir šių dėmenų išvestinės. Pasinaudoję ribos savybėmis, šią sumos ribą skaičiuojame panariui:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\
&= u'(x) + v'(x).
\end{aligned}$$

Analogiškai galima įrodyti ir kitas diferencijavimo taisykles.

3.5.1 pavyzdys. Raskite funkcijos $y = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^2}{2} - x + 3$ išvestinę.

<u>Sprendimas</u>

Išvestinės ieškome taikydami formulę $(u + v)' = u' + v'$:

$$y' = \left(\frac{x^6}{6}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' - (x)' + (3)'.$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines funkcijų x^6, x^2, x ir 3:

$$\left(\frac{x^6}{6}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' - (x)' + (3)' = \frac{6x^5}{6} + \frac{2x}{2} - 1.$$

Atlikę aritmetinius veiksmus, turėsime

$$\frac{6x^5}{6} + \frac{2x}{2} - 1 = x^5 + x - 1.$$

Atsakymas. $x^5 + x - 1$.

3.5.2 pavyzdys. Raskite funkcijos $y = 2\operatorname{tg} x - \sin x + 2$ išvestinę.

Sprendimas
Išvestinės ieškome taikydami formulę $(u+v)' = u' + v'$:

$$y' = (2\operatorname{tg} x)' - (\sin x)' + (2)'.$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines funkcijų $\operatorname{tg} x$, $\sin x$ ir 2:

$$(2\operatorname{tg} x)' - (\sin x)' + (2)' = \frac{2}{\cos^2 x} - \cos x.$$

Atsakymas. $x^5 + x - 1$.

3.5.3 pavyzdys. Raskite funkcijos $y = x^4 e^x$ išvestinę.

Sprendimas
Išvestinės ieškome taikydami formulę $(u \cdot v)' = u'v + v'u$:

$$y' = \left(x^4\right)' e^x + (e^x)' x^4.$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti funkcijų x^4 ir e^x išvestines:

$$\left(x^4\right)' e^x + (e^x)' x^4 = 4x^3 e^x + e^x x^4 = e^x \left(4x^3 + x^4\right).$$

Atsakymas. $e^x \left(4x^3 + x^4\right)$.

3.5.4 pavyzdys. Raskite funkcijos $y = \dfrac{x^2}{1+x}$ dalmens išvestinę ir apskaičiuokite jos reikšmę taške $x = 1$.

Sprendimas
Dalmens išvestinės ieškome taikydami formulę $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$:

$$y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'(1+x) - (1+x)' x^2}{(1+x)^2},$$

o reiškinio $(1+x)'$ išvestinės ieškome pagal formulę $(\mathrm{u}+\mathrm{v})' = \mathrm{u}' + \mathrm{v}'$, tuomet turėsime

$$y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'(1+x) - (1' + (x)')\, x^2}{(1+x)^2}.$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti x^2, x ir 1 išvestines:

$$\frac{\left(x^2\right)'(1+x) - (1' + (x)')\, x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x\,(1+x) - (0+1)\, x^2}{(1+x)^2}.$$

Atlikę algebrinius pertvarkymus, turime:

$$\frac{2x\,(1+x) - (0+1)\, x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x\,(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2}.$$

Apskaičiuojame reiškinio reikšmę taške $x = 1$:

$$y'(1) = \frac{2\cdot 1 + 1^2}{(1+1)^2} = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Atsakymas. $\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}$; $\dfrac{3}{4}$.

3.5.5 pavyzdys. Raskite funkcijos $4^x\sqrt[3]{x}$ išvestinę.

Sprendimas

Ieškosime išvestinės taikydami formulę $(u\cdot v)' = u'v + v'u$:

$$y' = (4^x)'\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)' 4^x.$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti funkcijų 4^x ir $x^{\frac{1}{3}}$ išvestines:

$$(4^x)'\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)' 4^x = 4^x \ln 4\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}4^x.$$

Atsakymas. $4^x \ln 4\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}4^x$.

3.6. Elastingumas

Elastingumas – santykinė išvestinė, kuri ekonomikoje taikoma rodiklių kitimo greičiui apibūdinti. Paklausos elastingumas kainos atžvilgiu yra procentinio paklausos kiekio ir kainos pokyčių santykio riba, kai kainos pokytis artėja prie nulio.

Funkcijos $y = f(x)$ elastingumu kintamojo x atžvilgiu taške x vadinama riba

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right), \ x \neq 0, y \neq 0.$$

$E_x(y)$ išreikškime funkcijos $y = f(x)$ išvestine:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'(x),$$

$$\boxed{E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'(x)}$$

3.6.1 pavyzdys. Apskaičiuokite gamybos kaštų y elastingumą produkcijos kiekio x atžvilgiu taške $x = 10$, kai šie rodikliai susieti priklausomybe $y = x^4 + x^3$.

Sprendimas

Pirmiausia randame funkcijos $y = x^4 + x^3$ išvestinę:

$$\left(x^4 + x^3\right)' = \left(x^4\right)' + \left(x^3\right)' = 4x^3 + 3x^2.$$

Pritaikę $E_x(y) = \dfrac{x}{y} \cdot y'(x)$ formulę, surasime funkcijos $y = x^4 + x^3$ elastingumą kintamojo x atžvilgiu

$$E_x(y) = \frac{x}{x^4 + x^3} \cdot \left(4x^3 + 3x^2\right) = \frac{x\left(4x^3 + 3x^2\right)}{x^4 + x^3} = \frac{x^3(4x + 3)}{x^3(x + 1)} = \frac{4x + 3}{x + 1}.$$

Įrašę $x = 10$ į gautąją išraišką, turime

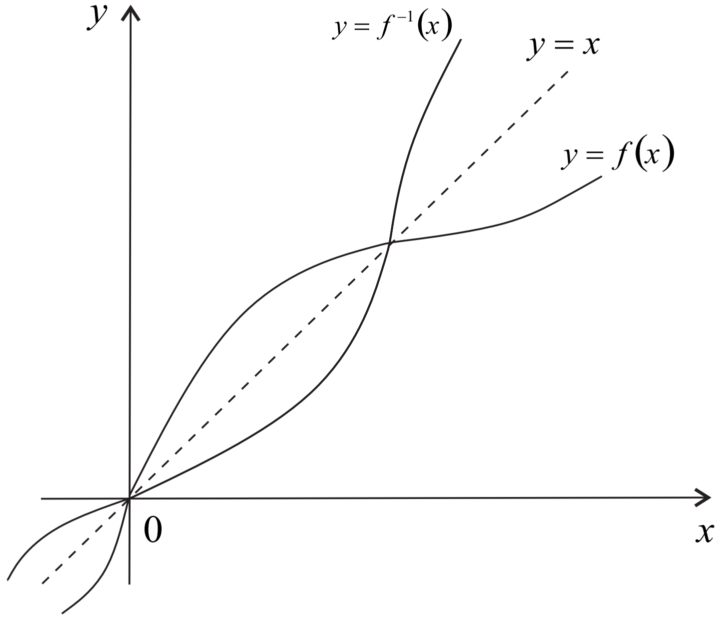
$$E_{10}(y) = \left. \frac{4x + 3}{x + 1} \right|_{x=10} = \frac{4 \cdot 10 + 3}{10 + 1} = \frac{43}{11} \approx 3,91.$$

Remdamiesi elastingumo apibrėžimu $E_{10}(y) = 3,91$, gauname, kad produkcijos apimčiai x padidėjus vienu procentu, gamybos kaštai padidėja $3,91$ procento.

Atsakymas. Gamybos kaštai padidėja $3,91$ procento.

3.7. Atvirkštinės funkcijos išvestinė

Tarkime, kad $y = f(x)$ taško $x = x_0$ aplinkoje yra didėjanti (arba mažėjanti) funkcija, t.y. $y_1 = f(x_1) > y_2 = f(x_2)$, kai $x_1 > x_2$. Tada egzistuoja atvirkštinė funkcija $x = f^{-1}(y)$. *Pavyzdžiui*, jei $y = x^2$, $x > 0$, tai $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Pastebėkime, kad perėjus prie įprastinių kintamųjų žymėjimų, kai x yra nepriklausomas kintamasis, o y – priklausomas kintamasis, tai funkcijos $y = f^{-1}(x)$ grafikas yra simetrinis tiesės $y = x$ atžvilgiu funkcijos $y = f(x)$ grafikui (žr. 3.7.1 pav.).



3.7.1 pav. Funkcijos ir jai atvirkštinės funkcijos grafikai

Kai funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama (turi išvestinę) taške $x = x_0$, tai abu pokyčiai $\Delta x = x - x_0$ ir $\Delta y = y - y_0$ $(y_0 = f(x_0))$ nyksta, kai $x \to x_0$ (arba $y \to y_0$). Turime

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{(f'(y_0))'}.$$

Taigi teorema įrodyta.

Teorema. Jeigu didėjanti (arba mažėjanti) funkcija $y = f(x)$ taške x_0 turi nelygią nuliui išvestinę $y'_x = f'(x_0)$, tai atvirkštinė funkcija $x = g(y)$ taške $y_0 = f(x_0)$ irgi turi išvestinę $x'_y = g'(y_0)$, t. y.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

3.7.1 pavyzdys. Tarkime, $y = x^2$, $x > 0$. Tada $x = \sqrt{y}$ ir gauname

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Pastebėkime, kad tą patį rezultatą gauname taikydami formulę $(y^\alpha)' = \alpha y^{\alpha-1}$:

$$(\sqrt{y})' = \left(y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

3.8. Sudėtinių funkcijų išvestinės

Tarkime, kad funkcija $u = u(x)$ taške x_0 turi išvestinę, o funkcija $y = f(u)$ atitinkamame taške $u_0 = u(x_0)$ turi išvestinę. Tada sudėtinės funkcijos $y = f(u(x))$ išvestinė randama pagal formulę

$$y'_x = f'(u(x))u'(x).$$

Įrodymas. Kadangi $y = f(u)$ taške u_0 turi išvestinę, tai

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0).$$

Remdamiesi ribos egzistavimo sąlyga, pokyčių santykį galime išreikšti išvestinės ir nykstamosios funkcijos suma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha(\Delta u),$$

čia $\alpha(\Delta u)$ yra nykstamoji funkcija taške 0, priklausanti nuo kintamojo Δu. Iš gautos lygybės išvedame Δy:

$$\Delta y = f'(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u.$$

Šios lygybės abi puses padalinkime iš Δx, tuomet gauname

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Kai $\Delta x \to 0$, tai dėl funkcijos $u = u(x)$ tolydumo artėja prie nulio ir jos pokytis Δu. Prie nulio artėja ir dydis α, priklausantis nuo Δu. Tuomet turime

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0)u'(x_0).$$

Vadinasi, įrodėme formulę

$$y'_x = f'(u(x))u'(x).$$

Sudėtinių funkcijų išvestinės:

$$
\begin{array}{ll}
(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'; & (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}; \\
(e^u)' = e^u \cdot u'; & (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'; \\
(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}; & (\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}; \\
(\sin u)' = \cos u \cdot u'; & (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \\
(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}; & (\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}; \\
(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; & (\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \\
(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}; & (\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}.
\end{array}
$$

3.8.1 pavyzdys. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinių skaičiavimo formulėmis, raskite funkcijų išvestines.
a) $y = (1 - x^2)^4$.

Sprendimas
Kadangi negalime iš karto pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele (nes mūsų funkcija yra sudėtinė), ieškome išvestinės taikydami formulę $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$y' = \left(\left(1 - x^2\right)^4\right)' = \left[\left(u^4\right)' = 4u^{4-1} \cdot u'\right] = 4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1 - x^2\right)',$$

o reiškinio $1 - x^2$ išvestinės ieškome pagal formulę $(u + v)' = u' + v'$, tada gauname

$$4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1 - x^2\right)' = 4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1' - \left(x^2\right)'\right).$$

Dabar jau galime remtis pagrindinių išvestinių lentele ir apskaičiuoti x^2 ir 1 išvestines:

$$4\left(1 - x^2\right)^3 \left(1' - \left(x^2\right)'\right) = 4\left(1 - x^2\right)^3 (0 - 2x).$$

Atlikę aritmetinius veiksmus, turėsime

$$4\left(1 - x^2\right)^3 (0 - 2x) = 4\left(1 - x^2\right)^3 (-2x) = -8x\left(1 - x^2\right)^3.$$

Atsakymas. $y' = -8x\left(1 - x^2\right)^3$.

b) $y = e^{x^2}$.

Sprendimas
Ieškome išvestinės remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis:

$$y' = \left(e^{x^2}\right)' = \left[(e^u)' = e^u \cdot u'\right] = e^{x^2}\left(x^2\right)'.$$

Jau galime pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele ir apskaičiuoti x^2 išvestinę:

$$e^{x^2}\left(x^2\right)' = 2xe^{x^2}.$$

Atsakymas. $y' = 2xe^{x^2}$.

c) $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Sprendimas
Ieškome išvestinės pagal $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ formulę. Tuomet turėsime

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{1 - x^2}\right)' = \left[\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\right] = \left(\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1 - x^2\right)' = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - x^2\right)', \end{aligned}$$

reiškinio $1-x^2$ išvestinės ieškome taikydami formulę $(u+v)' = u'+v'$, tada gauname

$$\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)' = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big(1' - \left(x^2\right)'\Big).$$

Remdamiesi pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines x^2 ir 1:

$$\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big(1' - \left(x^2\right)'\Big) = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(0-2x).$$

Atlikę algebrinius pertvarkymus, turėsime

$$\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(0-2x) = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Atsakymas. $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

d) $y = 3\cos\left(3x^2-5\right)$.

Sprendimas

Kadangi negalime iš karto pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele, nes funkcija yra sudėtinė, ieškome išvestinės taikydami formulę $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$$\begin{aligned} y' &= \left(3\cos\left(3x^2-5\right)\right)' = \left[(\cos u)' = -\sin u \cdot u'\right] \\ &= -3\sin\left(3x^2-5\right)\cdot\left(3x^2-5\right)'. \end{aligned}$$

Dabar jau galime pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele, apskaičiuoti $3x^2-5$ išvestinę ir gauti atsakymą:

$$-3\sin\left(3x^2-5\right)\cdot\left(3x^2-5\right)' = -3\sin\left(3x^2-5\right)\Big(\left(3x^2\right)' - 5'\Big)$$

$$= -3\sin\left(3x^2-5\right)(6x-0) = -18x\sin\left(3x^2-5\right).$$

Atsakymas. $y' = -18x\sin\left(3x^2-5\right)$.

e) $y = \sqrt[3]{(2x+1)^2}$.

Sprendimas

Kadangi negalime iš karto pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele, nes nagrinėjama funkcija yra sudėtinė, ieškome išvestinės taikydami formulę $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$:

$$y' = \left(\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)' = \left[\left(u^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}u^{\frac{2}{3}-1}\cdot u'\right] = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2x+1)'.$$

$(2x+1)$ ieškome taikydami formulę $(u\pm v)' = u' \pm v'$. Tada gauname

$$\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2x+1)' = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\left((2x)'+1'\right).$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines funkcijų $2x$ ir 1:

$$\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\left((2x)'+1'\right)=\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2+0).$$

Atlikę algebrinius veiksmus, turėsime

$$\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}(2+0)=\frac{4}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}.$$

Atsakymas. $y'=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}$.

f) $f(x)=\ln^3\sin^2\left(x^2+1\right)$.

Sprendimas

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\ln^3\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\right)' \\
&= 3\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\cdot\left(\ln\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\right)' \\
&= \frac{3\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)}{\sin^2\left(x^2+1\right)}\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)' \\
&= \frac{3\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)2\sin(x^2+1)}{\sin^2\left(x^2+1\right)}\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)' \\
&= \frac{6\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\sin(x^2+1)\cos\left(x^2+1\right)}{\sin^2\left(x^2+1\right)}\left(x^2+1\right)' \\
&= \frac{6\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\sin(x^2+1)\cos\left(x^2+1\right)2x}{\sin^2\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{12x\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\sin(x^2+1)\cos\left(x^2+1\right)}{\sin^2\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{12x\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\cos\left(x^2+1\right)}{\sin\left(x^2+1\right)} \\
&= 12x\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\operatorname{ctg}\left(x^2+1\right).
\end{aligned}$$

Atsakymas: $f'(x)=12x\ln^2\left(\sin^2\left(x^2+1\right)\right)\operatorname{ctg}\left(x^2+1\right)$.

g) $f(x) = \sqrt[3]{1+\cos^2 x}$.

Sprendimas

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{1+\cos^2 x}\right)' = \left(\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{3}}\right)' \\ &= \frac{1}{3}\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(1+\cos^2 x\right)' \\ &= \frac{1}{3}\left(1+\cos^2 x\right)^{-\frac{2}{3}} 2\cos x\,(\cos x)' \\ &= \frac{1}{3}\left(1+\cos^2 x\right)^{-\frac{2}{3}} 2\cos x\,(-\sin x) \\ &= \frac{-2\cos x\sin x}{3\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 x\right)^2}} = \frac{-\sin 2x}{3\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 x\right)^2}}. \end{aligned}$$

Atsakymas: $f'(x) = \dfrac{-\sin 2x}{3\sqrt[3]{\left(1+\cos^2 x\right)^2}}$.

3.9. Išvestinės radimas taikant logaritmavimą

Funkcija $(u(x))^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ vadinama **sudėtine rodikline funkcija**. Jeigu funkcijos $u(x)$ ir $v(x)$ turi išvestines, tai funkcijos $y = (u(x))^{v(x)}$, $u(x) > 0$, išvestinę galime rasti logaritmuodami šią funkciją:

$$\ln y = v(x)\ln u(x),$$

$$(\ln y)' = (v(x)\ln u(x))',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x),$$

$$y'_x = y\left(v'\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right) = u^v\left(v'\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right),$$

$$(u^v)'_x = u^v\cdot\ln u\cdot u' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'.$$

3.9.1 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^{x+1}$ išvestinę.

Sprendimas

Kai $f(x) = u(x)^{v(x)}$, čia $u(x)$ ir $v(x)$ yra diferencijuojamos funkcijos, tai $f'(x)$ randama logaritmuojant funkciją $f(x)$.
Logaritmuojame abi šio reiškinio puses:

$$\ln f(x) = \ln(\operatorname{ctg} x)^{x+1}.$$

Tuomet dešinėje gautojo reiškinio pusėje nukeliame laipsnio rodiklį prieš logaritmo ženklą

$$\ln f(x) = (x+1)\ln(\operatorname{ctg} x).$$

Dabar ieškome gautojo reiškinio išvestinės

$$(\ln f(x))' = ((x+1)\ln(\operatorname{ctg} x))'.$$

Taikydami formules $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ ir $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, gauname

$$(\ln f(x))' = ((x+1)\ln(\operatorname{ctg} x))',$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = (x+1)' \ln(\operatorname{ctg} x) + (\ln(\operatorname{ctg} x))'(x+1).$$

Surandame $x+1$ ir $\ln(\operatorname{ctg} x)$ išvestines:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(\operatorname{ctg} x) + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x)'(x+1),$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(\operatorname{ctg} x) + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)(x+1).$$

Atliekame veiksmus

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{x+1}{\operatorname{ctg} x \sin^2 x} = \ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{x+1}{\frac{\cos x}{\sin x}\sin^2 x}$$

$$= \ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{x+1}{\sin x \cos x} = \ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{2(x+1)}{2\sin x \cos x}$$

$$= \ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{2(x+1)}{\sin 2x}.$$

Kadangi mums reikia rasti $f'(x)$, o kairėje šio reiškinio pusėje turime $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, padauginame abi šio reiškinio puses iš $f(x)$.

$$f'(x) = f(x)\left(\ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{2(x+1)}{\sin 2x}\right).$$

Dešinėje pusėje vietoj $f(x)$ įrašę duotąją funkciją, t. y. $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^{x+1}$, turime

$$f'(x) = (\operatorname{ctg} x)^{x+1}\left(\ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{2(x+1)}{\sin 2x}\right).$$

Atsakymas: $f'(x) = (\operatorname{ctg} x)^{x+1}\left(\ln(\operatorname{ctg} x) - \frac{2(x+1)}{\sin 2x}\right)$.

3.10. Neišreikštinių funkcijų išvestinės

Tarkime, kad kintamieji x ir y susieti lygtimi

$$F(x, y) = 0.$$

Jei šią lygtį y atžvilgiu galima išspręsti tam tikrame intervale $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ (t. y. turime tapatybę $F(x, y(x)) \equiv 0$, kai $x \in X$), tai sakome, kad lygtis $F = 0$ apibrėžia **neišreikštinę funkciją** $y(x)$ (intervalas X yra jos apibrėžimo sritis).

Norėdami rasti funkcijos $y(x)$ išvestinę $y'(x)$, turime diferencijuoti panariui abi lygties $F(x, y) = 0$ puses pagal x, nepamiršdami, kad y **yra argumento** x **funkcija**:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \text{ arba } \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

3.10.1 pavyzdys. Raskime y', jeigu duota tokia funkcija

$$2x^2 + 3y^3 - xy = x - 2.$$

Sprendimas

Diferencijuojame abi duotosios lygties puses pagal x:

$$2 \cdot 2x + 3 \cdot 3y^2 \cdot y' - (y + xy') = 1.$$

Atlikę algebrinius veiksmus, gauname

$$4x + 9y^2 \cdot y' - y - xy' = 1.$$

Dabar perkelkime visus narius, neturinčius y', į dešiniąją pusę, o turinčius y' palikime kairėje pusėje:

$$9y^2 \cdot y' - xy' = 1 - 4x + y.$$

Iškėlę kairėje lygties pusėje y' už skliaustelių, turime

$$y'\left(9y^2 - x\right) = 1 - 4x + y.$$

Taigi

$$y' = \frac{1 - 4x + y}{9y^2 - x}.$$

Atsakymas. $y' = \dfrac{1 - 4x + y}{9y^2 - x}.$

3.10.2 pavyzdys. Raskime y', jeigu duota tokia funkcija

$$e^y + xy + 3 + \cos\left(x + 2y^3\right) = e^x + x.$$

Sprendimas

Diferencijuojame abi duotosios lygties puses pagal x:

$$e^y y' + y + xy' - \sin\left(x + 2y^3\right)\left(1 + 2 \cdot 3y^2 y'\right) = e^x + 1.$$

Atlikę algebrinius veiksmus, gauname

$$e^y y' + y + xy' - \sin\left(x + 2y^3\right) - 6y^2 y' \sin\left(x + 2y^3\right) = e^x + 1.$$

Perkelkime visus narius, neturinčius y', į dešiniąją pusę, o turinčius y' palikime kairėje pusėje:

$$e^y y' + xy' - 6y^2 y' \sin\left(x + 2y^3\right) = e^x + 1 - y + \sin\left(x + 2y^3\right).$$

Iškėlę kairėje lygties pusėje y' už skliaustelių, turime

$$y'\left(e^y + x - 6y^2 \sin\left(x + 2y^3\right)\right) = e^x + 1 - y + \sin\left(x + 2y^3\right).$$

Tada gauname, kad

$$y' = \frac{e^x + 1 - y + \sin\left(x + 2y^3\right)}{e^y + x - 6y^2 \sin\left(x + 2y^3\right)}.$$

Atsakymas. $y' = \dfrac{e^x + 1 - y + \sin\left(x + 2y^3\right)}{e^y + x - 6y^2 \sin\left(x + 2y^3\right)}$.

2.8 testas

$\boxed{1}$ $\left(\mathrm{tg} v^{40}\right)' =$

① $\frac{v^{40}}{\cos^2 v^{40}}$; ② $-\frac{40v^{40}}{\cos^2 v^{40}}$; ③ $-\frac{v^{39}}{\cos^2 v^{40}}$; ④ $\frac{40v^{39}}{\cos^2 v^{40}}$.

$\boxed{2}$ $\left(e^{\sin 41z}\right)' =$

① $41\cos 41z e^{\sin 41z}$; ② $\sin 41z e^{\sin 41z}$;
③ $41\sin 41z e^{\sin 41z}$; ④ $\cos 41z e^{\sin 41z}$.

$\boxed{3}$ Raskite funkcijos $y = \left(\dfrac{8x-20}{2x-13}\right)^9$ išvestinę.

① $-576\frac{(8x-20)^9}{(2x-13)^{10}}$; ② $-576\frac{(8x-20)^8}{(2x-13)^9}$;
③ $-64\frac{(8x-20)^8}{(2x-13)^{10}}$; ④ $-576\frac{(8x-20)^8}{(2x-13)^{10}}$.

4

Raskite funkcijos $y = \arcsin(9x-4)$ išvestinę.

① $\frac{9}{\sqrt{-81x^2+72x-15}}$; ② $\frac{-9}{\sqrt{-81x^2+72x-15}}$;
③ $\frac{9}{\sqrt{81x^2+72x+17}}$; ④ $\frac{-9}{\sqrt{81x^2+72x+17}}$.

5

Raskite funkcijos $y = \sin^3(x^8)$ išvestinę.

① $-24x^7\sin^2(x^8)$; ② $24x^7\sin^2(x^8)\cos(x^8)$;
③ $-24x^7\sin^2(x^8)\cos(x^8)$; ④ $24x^7\sin^2(x^8)$.

6

$\left(\sin^4(9x^7)\right)' =$

① $252x^6\sin^3(9x^7)\cos(9x^7)$; ② $-252x^6\sin^3(9x^7)\cos(9x^7)$;
③ $371x^6\sin^3(9x^7)\cos(9x^7)$; ④ $-252x^8\sin^5(9x^7)\cos(9x^7)$;
⑤ $371x^8\sin^5(9x^7)\cos(9x^7)$; ⑥ $-371x^6\sin^3(9x^7)\cos(9x^7)$;
⑦ $252x^8\sin^5(9x^7)\cos(9x^7)$; ⑧ $-371x^8\sin^5(9x^7)\cos(9x^7)$.

7

$\left(\sqrt[10]{7+\ln(x+8)}\right)' =$

① $\frac{\sqrt[10]{(7+\ln(x+8))^9}}{10(x+8)}$; ② $\frac{10}{\sqrt[10]{7+\ln(x+8)}}$;
③ $\frac{1}{\sqrt[10]{(7+\ln(x+8))^9}}$; ④ $\frac{1}{10\sqrt[10]{7+\ln(x+8)}}$;
⑤ $\frac{1}{\sqrt[10]{7+\ln(x+8)}}$; ⑥ $\frac{1}{10(x+8)\sqrt[10]{(7+\ln(x+8))^9}}$;
⑦ $\frac{1}{10(x+8)\sqrt[10]{7+\ln(x+8)}}$; ⑧ $\frac{10(x+8)}{\sqrt[10]{(7+\ln(x+8))^9}}$.

8

Tarkime, kad paklausos w priklausomybė nuo kainos x reiškiama funkcija $w = 170 - 25\sqrt[5]{x^4}$.
Raskite paklausos elastingumą $E_x[w]$.

① $\frac{5}{4} - \frac{17}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$; ② $\frac{5}{4} + \frac{17}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$; ③ $\frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{17}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}}$;
④ $\frac{5}{4} + \frac{17}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$; ⑤ $\frac{1}{\frac{5}{4} + \frac{17}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}}$; ⑥ $\frac{5}{4} - \frac{17}{2}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$.

3.11. Aukštesniųjų eilių išvestinės

Funkcijos $y = f(x)$ išvestinė $y' = f'(x)$ vadinama šios funkcijos **pirmosios eilės išvestine**, tada $(y')'$ vadinama funkcijos $y = f(x)$ **antrąja išvestine** arba **antrosios eilės išvestine**. Antroji išvestinė žymima y'' arba $f''(x)$.

Analogiškai apibrėžiamos kitų eilių išvestinės, t.y. antrosios išvestinės išvestinė yra trečioji išvestinė ir t.t.

$$\begin{gathered} y'' = (y')', \\ y''' = (y'')', \\ \ldots, \\ y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \end{gathered}$$

3.11.1 pavyzdys. Raskime funkcijos $y = e^{-x} + 3x^2$ trečiąją išvestinę.

<u>Sprendimas</u>
Pirmiausia randame pirmąją duotosios funkcijos išvestinę:

$$y' = \left(e^{-x} + 3x^2\right)' = \left(e^{-x}\right)' + \left(3x^2\right)' = e^{-x}(-x)' + 3 \cdot 2x = -e^{-x} + 6x.$$

Tada randame antrąją išvestinę

$$y'' = (y')' = \left(-e^{-x} + 6x\right)' = -\left(e^{-x}\right)' + (6x)' = -e^{-x}(-x)' + 6 = e^{-x} + 6.$$

Trečioji išvestinė atrodys taip:

$$y''' = (y'')' = \left(e^{-x} + 6\right)' = \left(e^{-x}\right)' + (6)' = -e^{-x}(-x)' + 0 = -e^{-x}.$$

Atsakymas. $y''' = -e^{-x}$.

Svarbu

Jeigu reiktų rasti funkcijos $y = e^{-x} + 3x^2$ trečiąją išvestinę taške $x = 1$, tai atsakymas būtų

$$y'''(1) = -e^{-x}|_{x=1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

2.9 testas

$$f(x) = 26\sin(5x) - 35x^2$$

$\boxed{1}$ $f''(0) =$

① -165; ② -35; ③ 70; ④ -130; ⑤ 0;
⑥ 35; ⑦ -70; ⑧ 130; ⑨ 165; ⓪ 125.

$\boxed{2}$ $f'''(0) =$

① 720; ② 650; ③ -70; ④ -720; ⑤ 0;
⑥ -650; ⑦ -3250; ⑧ 70; ⑨ 3250; ⓪ 125.

$$z(x) = \frac{27x^2 - 2}{15x}$$

$\boxed{3}$ $z'(-5) =$

① $\frac{9}{5}$; ② $-\frac{677}{375}$; ③ $-\frac{9}{5}$; ④ $-\frac{673}{375}$;
⑤ $\frac{673}{375}$; ⑥ $-\frac{677}{75}$; ⑦ $\frac{677}{375}$; ⑧ 0.

$\boxed{4}$ $z''(5) =$

① $\frac{2}{1875}$; ② $-\frac{4}{15}$; ③ $\frac{4}{1875}$; ④ $-\frac{4}{375}$;
⑤ 0; ⑥ $\frac{4}{375}$; ⑦ $-\frac{2}{1875}$; ⑧ $-\frac{4}{1875}$.

3.12. Teiloro formulė

Pagal Lagranžo teoremą[9]

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a),$$

jei tik funkcija f – tolydi ir diferencijuojama intervale $(a-\gamma, a+\gamma)$ (čia γ – teigiamas skaičius), o ξ yra tam tikras taškas tarp x ir a.
Jeigu funkcija f yra $(n+1)$-ą kartą diferencijuojama intervale $(a-\gamma, a+\gamma)$, kuriam priklauso ir x, $x \neq a$, tada egzistuoja taškas ξ, esantis tarp x ir a, toks, kad

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned} \tag{3.12.6}$$

Paskutinis dešinės pusės dėmuo yra vadinamas **Teiloro[10] formulės Lagranžo[11]**

[9] Jei funkcija $y = f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a; b]$ ir diferencijuojama intervale $(a; b)$, tai tarp a ir b yra taškas c, kuriame $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

[10] Brook Taylor (1685–1731) – anglų matematikas.

[11] Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – prancūzų matematikas, astronomas ir inžinierius.

formos liekamuoju nariu:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

3.12.1 pavyzdys. Užrašykite pirmuosius tris Teiloro formulės narius:

$$f(x) = \sqrt[3]{8+x}, \quad x \to 0.$$

Sprendimas
Remdamiesi (3.12.6) formule, užrašysime tris pirmuosius Teiloro formulės narius. Visų pirma reikia apskaičiuoti šios funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{8+x}\right)' = \left((8+x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \left[\left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot u'\right]$$
$$= \frac{1}{3}(8+x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (8+x)' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(8+x)^2}}.$$

Dabar apskaičiuojame šios funkcijos antrąją išvestinę:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(8+x)^2}}\right)' = \left(\frac{1}{3}(8+x)^{-\frac{2}{3}}\right)' = \left[\left(u^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}} \cdot u'\right]$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(8+x)^{-\frac{5}{3}}(8+x)' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(8+x)^5}}.$$

Pirmieji trys Teiloro formulės nariai atrodo taip:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2,$$

kai $a = 0$, turėsime

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2. \tag{3.12.7}$$

Todėl reikia apskaičiuoti pirmosios ir antrosios išvestinės reikšmes taške 0:

$$f'(0) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(8+0)^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12},$$
$$f''(0) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{(8+0)^5}} = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{8^5}} = -\frac{2}{9 \cdot 8 \cdot 4} = -\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 2} = -\frac{1}{144}.$$

Belieka apskaičiuoti funkcijos reikšmę taške 0

$$f(0) = \sqrt[3]{8+0} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Gautus rezultatus įrašę į (3.12.7) formulę, turėsime:

$$\sqrt[3]{8+x} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot x + \frac{-\frac{1}{144}}{2!} \cdot x^2 = 2 + \frac{1}{12} \cdot x - \frac{1}{144 \cdot 2} \cdot x^2 = 2 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{288}.$$

Atsakymas. $\sqrt[3]{8+x} \approx 2 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{288}$, kai $x \to 0$.

3.13. Liopitalio taisyklė

Sakome, kad dviejų funkcijų santykis $\frac{f(x)}{g(x)}$, kai $x \to a$ (a gali būti baigtinis ar begalinis), yra *neapibrėžtumas* $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$, jei

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ arba } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Liopitalio[12] teorema. Tarkime, funkcijos f ir g apibrėžtos ir diferencijuojamos kokioje nors taško a aplinkoje, išskyrus gal tik patį tašką a. Be to, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$), o išvestinė $g'(x)$ nelygi nuliui nė viename minėtos aplinkos taške. Jei šiomis sąlygomis egzistuoja (baigtinė ar begalinė) riba $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tai egzistuos ir riba $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ir bus teisinga šitokia lygybė:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Kai turime neapibrėžtumus $\dfrac{0}{0}$ arba $\dfrac{\infty}{\infty}$, tuomet $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, kai dešiniosios pusės santykio riba egzistuoja, o a gali būti bet koks realus skaičius arba tolti į begalybę ($\pm\infty$).

Pastaba

3.13.1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ gali neegzistuoti, nors funkcijų f ir g santykio riba $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ir egzistuoja.

Pavyzdžiui, reiškinys

$$\frac{\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln(1+x)\right)'} = \frac{2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = 2x(1+x)\cos\frac{1}{x} + x \sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x},$$

kai $x \to 0$, ribos neturi, tačiau

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}}{\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{0}{\ln e} = \frac{0}{1} = 0.$$

Prisiminkime, kad nykstamosios ir aprėžtosios funkcijų sandauga yra nykstamoji funkcija (žr. 109 psl.), todėl

$$\lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0.$$

[12] Guillaume Francois Antoine marquis de L'Hopital (1661–1704) – prancūzų matematikas.

Pastaba

3.13.2. Jeigu $f'(x)$ ir $g'(x)$ tenkina tas pačias sąlygas, kaip ir funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, tai Liopitalio taisyklę galima taikyti dar kartą. Tuomet: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Dažnai Liopitalio taisyklę reikia taikyti keletą kartų.

Pastaba

3.13.3. Neapibrėžtumas $0\cdot\infty$ pertvarkomas į neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$, tuomet

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Pastaba

3.13.4. Neapibrėžtumai 0^0, ∞^0 ir 1^∞ pakeičiami neapibrėžtumu $0\cdot\infty$ išlogaritmavus nagrinėjamą reiškinį, arba galime taikyti tokias formules:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$, kai turime neapibrėžtumus 0^0, ∞^0.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$, kai turime neapibrėžtumą 1^∞.

Pastaba

3.13.5. Neapibrėžtumais **nelaikome** santykių $\dfrac{a}{0}=\infty$, kai $a\neq 0$ ir $\dfrac{a}{\infty}=0$, kai $a\neq\infty$.

3.13.1 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to+0} x^2\ln x$.

Sprendimas

Neapibrėžtumas $0\cdot\infty$. Reiškinį pertvarkome į neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$ (žr. **3.13.3** pastabą):

$$\lim_{x\to+0} x^2\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}.$$

Dabar jau galime taikyti Liopitalio taisyklę. Tuomet turėsime

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}.$$

Atlikę algebrinius pertvarkymus, apskaičiuojame ribą

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}}\right)=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^3}{2x}\right)=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{0}{2}=0.$$

Atsakymas. 0.

3.13.2 pavyzdys. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3^x}$.

Sprendimas
Kadangi $3^{+\infty}=+\infty$, turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Todėl iš karto taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(3^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3^x\ln 3},$$

įrašę vietoje x begalybę, dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Remdamiesi **3.13.2** pastaba, taikome Liopitalio taisyklę dar kartą:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3^x\ln 3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(3^x\ln 3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln 3\cdot 3^x\ln 3}.$$

Kadangi jau nebėra neapibrėžtumo, įrašome vietoj x begalybę ir apskaičiuojame ribą:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln 3\cdot 3^x\ln 3}=\frac{2}{\ln 3\cdot 3^\infty\ln 3}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Atsakymas. 0.

2.10 testas

1 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{21t}}{t^7}=$ ① 1; ② 3; ③ ∞; ④ $\frac{1}{3}$; ⑤ 0; ⑥ $+\infty$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}x^3\ln x=$
① 3; ② 1;
③ riba neegzistuoja; ④ $\ln 3$;
⑤ 0; ⑥ ∞.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{15}}{10^x}=$
① 0; ② $\frac{3}{2}$;
③ 10; ④ $\frac{1}{10}$;
⑤ 15; ⑥ riba neegzistuoja.

4 Kuris teiginys yra teisingas?
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[18]{x}}{e^{4x}}=0$;
(b) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[7]{x}\ln x=0$.

① (b); ② (a); ③ abu teiginiai; ④ nė vienas.

3.14. Funkcijos diferencialas

Diferencialo apibrėžimas

Funkcijos $y = f(x)$ **diferencialu** (žymime dy) vadinama sandauga $f'(x) \cdot \Delta x$, t. y.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Diferencialo formulėje vietoj Δx galima rašyti dx, nes pagal apibrėžimą funkcijos $y = x$ diferencialas $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Taigi

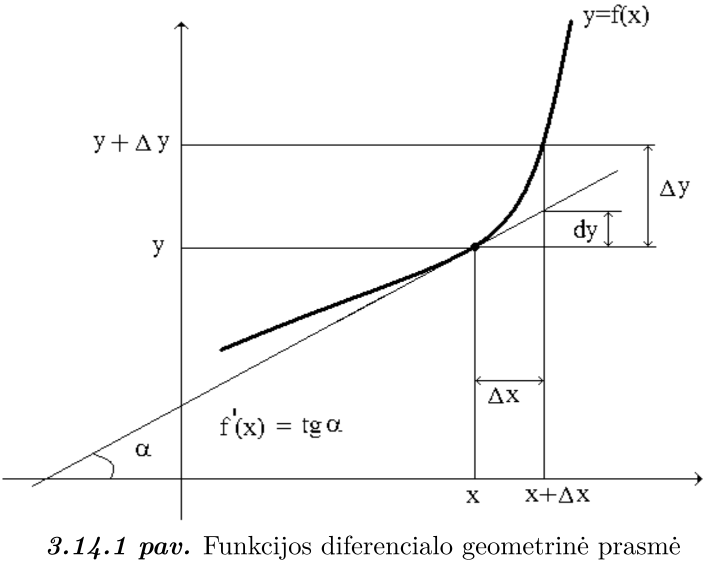
$$dy = f'(x)dx.$$

Iš čia išplaukia

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x),}$$

t. y. *funkcijos išvestinė lygi funkcijos diferencialo ir argumento diferencialo santykiui.*

Funkcijos diferencialas dažnai taikomas matematikoje, skaičiuojant funkcijų reikšmes, taip pat vertinant paklaidų didumą. Tai daroma remiantis tuo, kad *funkcijos pokytis yra apytiksliai lygus funkcijos diferencialui, kai argumento pokytis mažas*, t. y. $\Delta y \approx dy$. Ši lygybė išplaukia iš išvestinės apibrėžimo $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.



3.14.1 pav. Funkcijos diferencialo geometrinė prasmė

Iš 3.14.1 paveikslo galime pastebėti, kad

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0),$$

todėl

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Taigi $df(x_0) = dy$.

Funkcijos diferencialas lygus liestinės, nubrėžtos per tašką x_0, ordinatės pokyčiui, atitinkančiam argumento pokytį Δx.

Funkcijos $y = f(x)$ diferencialo diferencialas vadinamas **antruoju diferencialu** (arba antrosios eilės diferencialu) ir žymimas d^2y arba $d^2f(x)$. Taigi $d^2y = d(dy)$. Analogiškai $d^3y = d(d^2y)$ ir t. t. Rasime antros eilės diferencialą:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx = d(f'(x))dx = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2.$$

Taigi

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

3.14.1 pavyzdys. Raskime funkcijos $y = e^{5x}$ pirmos eilės diferencialą.

Sprendimas
Remdamiesi diferencialo apibrėžimu, gauname:

$$dy = d\left(e^{5x}\right) = \left(e^{5x}\right)' dx = e^{5x}(5x)' dx = 5e^{5x}dx.$$

Atsakymas. $dy = 5e^{5x}dx$.

3.14.2 pavyzdys. $y = \sin 4x$.

Sprendimas
Iš diferencialo apibrėžimo išplaukia, kad

$$dy = d(\sin 4x) = (\sin 4x)' dx = \cos 4x (4x)' dx = 4\cos 4x dx.$$

Atsakymas. $dy = 4\cos 4x dx$.

Diferencialo taikymas apytiksliams skaičiavimams

Imkime funkcijos $y = f(x)$ pokytį ir diferencialą taške $x = a$:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a), \quad dy = f'(a)\Delta x.$$

Kadangi $\Delta y \approx dy$, tai iš užrašytųjų lygybių gauname

$$f(a+\Delta x) - f(a) \approx f'(a)\Delta x$$

arba

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x. \tag{3.14.8}$$

Jeigu $a+\Delta x = x$, $\Delta x = x - a$, tai vietoj (3.14.8) formulės turėsime formulę:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a)\,.$$

Atskiru atveju, kai $a = 0$, gauname

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x. \tag{3.14.9}$$

3.14.1 pavyzdys. Taikydami diferencialą, užrašykime apytikslę formulę duotajai funkcijai:
b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, kai $x \to 0$ ir apskaičiuokime $f(0,12)$.

Sprendimas
Remdamiesi (3.14.9) formule, užrašysime apytikslę šios funkcijos formulę. Pirmiausia apskaičiuojame šios funkcijos išvestinę:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{1+x})' = \left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \left[\left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'\right] \\ &= \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,(1+x)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

Apskaičiuojame išvestinės reikšmę taške $x = 0$:

$$f'\,(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

Ieškome funkcijos reikšmės taške $x = 0$:

$$f\,(0) = \sqrt{1+0} = 1.$$

Pritaikę (3.14.9) formulę ir įrašę gautąsias reikšmes, turėsime

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot x, \quad \text{kai} \quad x \to 0.$$

Taigi

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad \text{kai} \quad x \to 0.$$

Apskaičiuojame $\sqrt{1,12} \approx 1 + \frac{0{,}12}{2} = 1,06$. Atkreipkime dėmesį, kad tikslioji reikšmė $\sqrt{1,12} = 1,0583005\ldots$ ir apskaičiuotos apytikslės reikšmės *santykinė paklaida* yra

$$\frac{|1,0583005\ldots - 1,06|}{1,0583005\ldots} \cdot 100\ \% \approx 0,16\ \%.$$

Atsakymas. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$, kai $x \to 0$; $1,06$.

b) $f(x) = \ln(1-x)$, kai $x \to 0$.

Sprendimas

Remdamiesi (3.14.9) formule, užrašysime apytikslę šios funkcijos formulę. Pirmiausia apskaičiuojame šios funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = (\ln(1-x))' = \left[(\ln u)' = \frac{1}{u}u'\right] = \frac{1}{(1-x)}(1-x)' = -\frac{1}{1-x},$$

radę išvestinę, apskaičiuojame jos reikšmę taške 0:

$$f'(0) = -\frac{1}{1-0} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Ieškome funkcijos reikšmės taške 0:

$$f(0) = \ln(1-0) = \ln 1 = 0.$$

Pritaikę (3.14.9) formulę ir įrašę gautąsias reikšmes, turėsime

$$f(x) \approx 0 - 1 \cdot x \approx -x.$$

Taigi

$$\ln(1-x) \approx -x, x \to 0.$$

Atsakymas. $-x$, $x \to 0$.

2.11 testas

1 Tarkime, kad $h(p) = \dfrac{p^{10}}{\sqrt{p+15}}$. Tada $dh(1) =$

① $\frac{159}{128}\,dp$; ② $\frac{479}{128}\,dp$; ③ $\frac{639}{128}\,dp$; ④ $\frac{319}{128}\,dp$.

Tarkime, kad $h(x) = \sqrt[7]{1+8x}$.

2 Taikydami diferencialą užrašykite apytikslę formulę, kai $x \to 0$.

① $h(x)\approx 1-\frac{8}{7}x$; ② $h(x)\approx \frac{8}{7}x$; ③ $h(x)\approx 1+\frac{8}{7}x$; ④ $h(x)\approx 1-\frac{x}{7}$;
⑤ $h(x)\approx 1+8x$; ⑥ $h(x)\approx 1-8x$; ⑦ $h(x)\approx -\frac{8}{7}x$; ⑧ $h(x)\approx 1+\frac{x}{7}$.

3 $h\left(-\frac{1}{7}\right) \approx$

① $\frac{57}{49}$; ② $\frac{8}{49}$; ③ $\frac{6}{7}$; ④ $\frac{48}{49}$; ⑤ $\frac{8}{7}$; ⑥ $-\frac{8}{49}$; ⑦ $\frac{50}{49}$; ⑧ $\frac{41}{49}$.

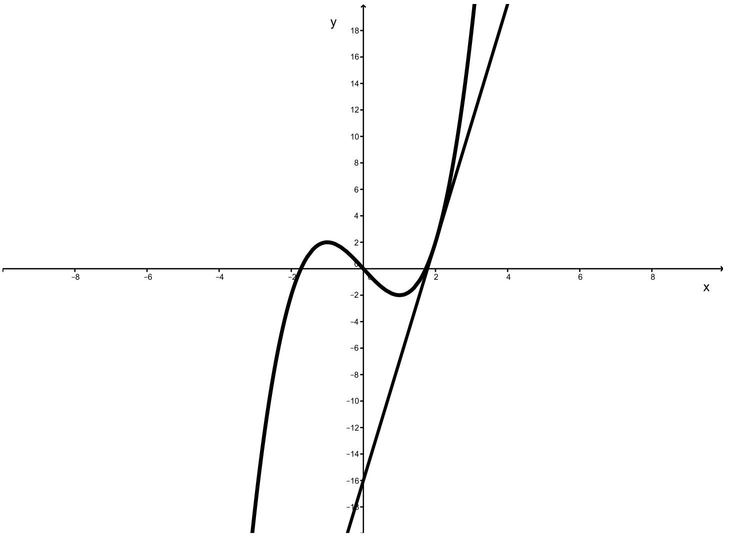
4. Išvestinių taikymas

Raktiniai žodžiai: Funkcijos grafiko liestinės lygtis. Funkcijos didėjimas ir mažėjimas. Ekstremumai. Kritiniai taškai. Iškilumo intervalai. Funkcijos grafiko asimptotės.
Literatūra: [Apy01] II skyrius, 47–60 p.; [Būd08] 118–140 p.; [Pek05] VII skyrius, 158–182 p.; [Rum76] XVI–XVIII skyriai, 263–285 p., 311–314 p., 317–329 p.; [Tho05] 244–285 p.

4.1. Funkcijos grafiko liestinės taške lygtis

Funkcijos $y = f(x)$ grafiko **liestinės taške** $x = a$ **lygtis** yra

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$



4.1.1 pav. Funkcijos $f(x)$ liestinė taške $A(2; 2)$

4.1.1 pavyzdys. Užrašykime kreivės

$$y = x^3 - 3x$$

liestinės, nubrėžtos per tašką $A(2; 2)$, lygtį (žr. 4.1.1 pav.).

<u>Sprendimas</u>
Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės taške a lygtis bendruoju atveju:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Turime sąlygą: $f(a) = f(2) = 2$. Raskime funkcijos išvestinę $f'(x) = 3x^2 - 3$. Apskaičiuokime išvestinės reikšmę taške $a = 2$, t. y. $f'(a) = f'(2) = 9$. Užrašykime kreivės $y = x^3 - 3x$ liestinės, nubrėžtos per tašką $A(2;2)$, lygtį:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = 2 + 9(x - 2) = 9x - 16.$$

Atsakymas. $y = 9x - 16$.

2.12 testas

$\boxed{1}$ Raskite funkcijos $y = -\dfrac{x+2}{x+3}$ grafiko liestinės taške $M(-4,-2)$ atstumą nuo koordinačių pradžios taško.

① $\frac{72}{\sqrt{2}}$; ② $\frac{6}{\sqrt{2}}$; ③ $6\sqrt{2}$; ④ $10\sqrt{2}$; ⑤ $72\sqrt{2}$; ⑥ $\frac{3}{\sqrt{2}}$; ⑦ $\frac{10}{\sqrt{2}}$.

Funkcija $f(x)$ apibrėžta formule $f(x) = 2x^5 - 5x$.

$\boxed{2}$ Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę $f'(x)$.

① $f'(x)=10x^4-5$; ② $f'(x)=10x^6-5$; ③ $f'(x)=10x^5-5$;
④ $f'(x)=8x^4-5$; ⑤ $f'(x)=8x^5-5$; ⑥ $f'(x)=8x^6-5$.

$\boxed{3}$ $f'(3) =$

① 643; ② 1939; ③ 7285; ④ 2425; ⑤ 5827; ⑥ 805.

$\boxed{4}$ Užrašykite funkcijos $f(x)$ liestinės, einančios per tašką $A\big(3, f(3)\big)$, lygtį.

① $y=805x-1944$; ② $y=-471x-805$; ③ $y=-805x+2886$;
④ $y=471x+805$; ⑤ $y=-805x-1944$; ⑥ $y=805x+2886$.

4.2. Funkcijos didėjimo ir mažėjimo požymis

Pakankamus funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervale požymius išreiškia šios teoremos:

1. Jeigu išvestinė $f'(x)$ intervale $(a;b)$ teigiama, tai funkcija $f(x)$ tame intervale didėja.
2. Jeigu išvestinė $f'(x)$ intervale $(a;b)$ neigiama, tai funkcija $f(x)$ tame intervale mažėja.

Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalai vadinami **monotoniškumo intervalais**.

Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalai nustatomi tokia tvarka:

1. Randami funkcijos **kritiniai taškai**, t. y. taškai, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja.
2. Pažymint kritinius taškus, nustatomi intervalai, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.
3. Nustatomas išvestinės ženklas kiekviename iš gautųjų intervalų. Jei $f'(x) > 0$ – funkcija didėja, o jei $f'(x) < 0$ – funkcija mažėja.

4.2.1 pavyzdys. Įrodykime, kad funkcija

$$y = \operatorname{arctg} x - x$$

visur mažėja.

Sprendimas
Rasime funkcijos $y = \operatorname{arctg} x - x$ išvestinę

$$y' = (\operatorname{arctg} x - x)' = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Prilyginsime išvestinę nuliui, t. y.

$$y' = \frac{-x^2}{1+x^2} = 0,$$

ir išspręsime lygtį

$$\frac{-x^2}{1+x^2} = 0.$$

$$\begin{cases} -x^2 = 0, \\ 1+x^2 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \in (-\infty; +\infty); \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

Sudarysime lentelę:

Intervalai	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
y' ženklas	$-$	$-$
y kitimas	$\downarrow$	$\downarrow$

$\downarrow$ žymime, kai funkcija mažėja; $\uparrow$ žymime, kai funkcija didėja.
Atkreipsime dėmesį, kad taške $x = 0$ funkcija $y = \operatorname{arctg} x - x$ ekstremumo (maksimumo arba minimumo) neįgyja. Funkcija $y = \operatorname{arctg} x - x$ mažėja visoje skaičių tiesėje $x \in (-\infty; +\infty)$.

4.2.2 pavyzdys. Įrodykime nelygybę

$$x \geqslant \ln(1+x), \; x \geqslant 0.$$

Sprendimas
Pažymėsime

$$y(x) = x - \ln(1+x), \; x \geqslant 0$$

ir rasime funkcijos išvestinę:

$$y' = (x - \ln(1+x))' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0,$$

nes $x \geqslant 0$.

Kadangi $y' = \dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$, kai $x \geqslant 0$, tai funkcija $y = x - \ln(1+x)$ didėja, kai $x \geqslant 0$. Apskaičiuosime funkcijos $y = x - \ln(1+x)$ reikšmę taške $x = 0$:

$$y(0) = 0 - \ln(1+0) = 0 - 0 = 0.$$

Kadangi funkcija $y = x - \ln(1+x)$ yra didėjanti, kai $x \geqslant 0$ ir $y(0) = 0$, tai, kai $x \geqslant 0$,

$$x - \ln(1+x) \geqslant 0,$$

$$x \geqslant \ln(1+x).$$

Jei funkcijos išvestinė, pereidama (iš kairės į dešinę) kritinį tašką x_0, keičia ženklą iš pliuso į minusą, tai x_0 – **maksimumo taškas**, o jei iš minuso į pliusą, tai x_0 – **minimumo taškas**.

Funkcijos minimumo ir maksimumo taškai vadinami jos **ekstremumų taškais**, o funkcijos reikšmės tuose taškuose – jos **maksimumu** ir **minimumu** arba **ekstremumu**.

Jei išvestinė, pereidama kritinį tašką, ženklo nekeičia, tai tame taške ekstremumo nėra.

Funkcijos ekstremumai nustatomi tokia tvarka:
1. Randami funkcijos kritiniai taškai.
2. Pažymint kritinius taškus, nustatomi intervalai, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.
3. Nustatomas funkcijos išvestinės ženklas kiekviename iš gautų intervalų. Jei funkcijos išvestinė, pereidama kritinį tašką, keičia ženklą iš „+“ į „–“, tai turime maksimumo tašką, jei keičia ženklą iš „–“ į „+“ – minimumo tašką, o jei ženklo nekeičia – ekstremumo nėra.
4. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes ekstremumų taškuose.

4.2.3 pavyzdys. Raskite funkcijos $y = 5\sqrt[5]{x^2} - x^2$ ekstremumus.

Sprendimas
Funkcijos apibrėžimo sritis: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
Dabar randame funkcijos išvestinę:

$$y' = \left(5\sqrt[5]{x^2} - x^2\right)' = \left(5x^{\frac{2}{5}}\right)' - \left(x^2\right)' = 5 \cdot \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - 2x$$
$$= \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} - 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - x\right) = 2\left(\frac{1 - x\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}}\right).$$

Randame funkcijos kritinius taškus, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja.

$$1 - x\sqrt[5]{x^3} = 0,$$

$y' = 0$, kai $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ir y' neegzistuoja, kai $x_3 = 0$.
Pažymėdami kritinius taškus $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, nustatome intervalus, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.

Intervalai	$(-\infty; -1)$	$x = -1$	$(-1; 0)$	$x = 0$	$(0; 1)$	$x = 1$	$(1; +\infty)$
y' ženklas	$+$		$-$	neegz.	$+$		$-$
y kitimas	$\uparrow$	max	$\downarrow$	min	$\uparrow$	max	$\downarrow$

Iš lentelės pastebime, kad y didėja intervaluose $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ ir mažėja intervaluose $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$.

$$y_{\max} = y(\pm 1) = 5\sqrt[5]{(\pm 1)^2} - (\pm 1)^2 = 5 - 1 = 4.$$

$$y_{\min} = y(0) = 5\sqrt[5]{0^2} - 0^2 = 0.$$

Atsakymas. $y_{\max}(\pm 1) = 4$, $y_{\min}(0) = 0$.

4.3. Funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmė duotame intervale

Tolydžios funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmė duotame intervale randama taip:
1. Apskaičiuojame funkcijos išvestinę.
2. Randame kritinius taškus, priklausančius duotajam intervalui.
3. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes tuose taškuose.
4. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes duotojo intervalo galuose.
5. Palyginame gautąsias reikšmes. Mažiausioji (didžiausioji) reikšmė iš jų ir bus mažiausioji (didžiausioji) reikšmė tame intervale.

4.3.1 pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 59$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale $[-3; 3]$.

<u>Sprendimas</u>
Apskaičiuojame duotosios funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(2x^3 - 9x^2 - 24x + 59\right)' = 6x^2 - 18x - 24.$$

Surandame kritinius taškus:

$$\begin{gathered} f'(x) = 0, \\ 6x^2 - 18x - 24 = 0/:6, \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \\ x_1 = -1, x_2 = 4. \end{gathered}$$

Radę kritinius taškus, patikriname, ar abu taškai patenka į intervalą $[-3; 3]$. Kadangi patenka tik vienas taškas $x_1 = -1$, todėl skaičiuojame funkcijos reikšmes taške $x_1 = -1$ ir intervalo galuose:

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 9(-1)^2 - 24(-1) + 59 = -2 - 9 + 24 + 59 = 72,$$

$$f(-3) = 2(-3)^3 - 9(-3)^2 - 24(-3) + 59 = -54 - 81 + 72 + 59 = -4,$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 9(3)^2 - 24(3) + 59 = 54 - 81 - 72 + 59 = -40.$$

Palyginę reikšmes, gauname, kad

$$\max_{x\in[-3;3]} f(x) = f(-1) = 72, \quad \min_{x\in[-3;3]} f(x) = f(3) = -40.$$

Atsakymas. $\max\limits_{x\in[-3;3]} f(x) = 72, \min\limits_{x\in[-3;3]} f(x) = -40.$

2.13 testas

1 Apskaičiuokite $d = M - m$, kai $M = \max\limits_{x\in[-8,-6]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[-8,-6]} f(x)$ (funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmės atkarpoje) $f(x) = 6x^3 + 63x^2 + 180x + 5$.

① 372; ② 192; ③ 742; ④ 1255; ⑤ 1617; ⑥ 210; ⑦ 256.

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 48x + 27$$

2 $\max\limits_{x\in[-3,5]} f(x) =$

① 52; ② -72; ③ -677; ④ 72; ⑤ 63; ⑥ -488; ⑦ -491.

3 $\min\limits_{x\in[-3,5]} f(x) =$

① 72; ② -488; ③ -677; ④ -72; ⑤ 63; ⑥ -491; ⑦ 52.

4 $\max\limits_{x\in[-3,5]} |f(x)| =$

① 52; ② 491; ③ 677; ④ 189; ⑤ 63; ⑥ 488; ⑦ 72; ⑧ 485.

5 Apskaičiuokite $d = M - m$, kai $M = \max\limits_{x\in[1,5]} f(x)$,$m = \min\limits_{x\in[1,5]} f(x)$ (funkcijos didžiausia ir mažiausia reikšmės atkarpoje) $f(x) = 2x^3 + 21x^2 + 72x - 2$.

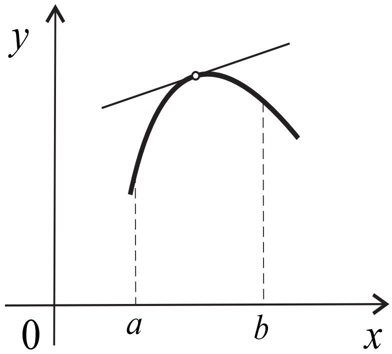
① 1437; ② 1690; ③ 1040; ④ 1562; ⑤ 381; ⑥ 1210; ⑦ 795.

4.4. Funkcijos iškilumo intervalai

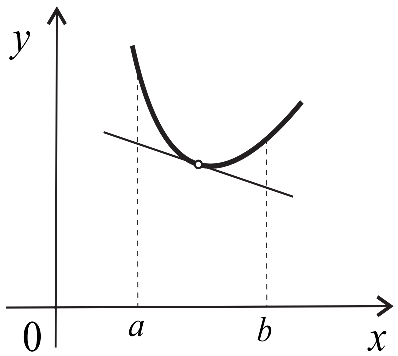
Kreivė vadinama **iškila aukštyn** (**žemyn**) intervale (a, b), jeigu visi tos kreivės taškai yra po liestine (virš liestinės), nubrėžta per bet kurį kreivės tašką tame intervale (4.4.1 pav., 4.4.2 pav.).

Kreivės $y = f(x)$ **vingio** (**perlinkio**) **tašku** vadiname tašką $(x_0, f(x_0))$, kuriame kinta kreivės iškilumas.

Jei $f''(x_0) = 0$ (arba neegzistuoja, bet $f'(x_0)$ egzistuoja) ir $f''(x)$ keičia ženklą eidamos per x_0, tai taškas $(x_0, f(x_0))$ yra kreivės $y = f(x)$ vingio (perlinkio) taškas.



4.4.1 pav. Iškilumas aukštyn



4.4.2 pav. Iškilumas žemyn

Kreivės $y = f(x)$ iškilumo aukštyn (iškilumo žemyn) intervalus ir perlinkio taškus randame taip:
1. Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį.
2. Randame funkcijos $y = f(x)$ pirmos ir antros eilės išvestines.
3. Pažymint kritinius taškus, nustatomi intervalai, kuriuose funkcijos antroji išvestinė turi pastovų ženklą.
4. Nustatomas antrosios išvestinės ženklas kiekviename iš gautųjų intervalų. Jei $y = f''(x) > 0$ – funkcijos grafikas **iškilas žemyn**, o jei $y = f''(x) < 0$ – funkcijos grafikas **iškilas aukštyn**.
5. Jei taške x antroji išvestinė $y = f''(x)$ keičia ženklą ir $y = f''(x) = 0$ (arba $y = f''(x)$ neegzistuoja), tai šis taškas yra kreivės **vingio** (**perlinkio**) taškas.

4.4.1 pavyzdys. Nustatykite kreivės $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ iškilumo intervalus ir raskite vingio taškus.

Sprendimas
Nustatome apibrėžimo sritį: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Taigi

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'(x-1) - (x-1)'x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Dabar surandame antrąją išvestinę ir nustatome funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

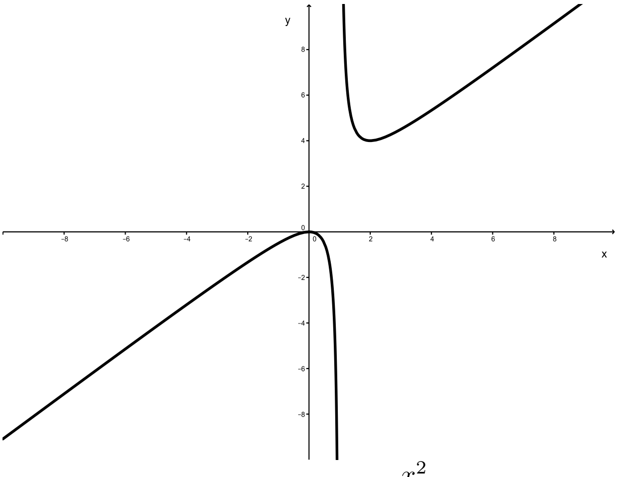
$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{\left(x^2 - 2x\right)'(x-1)^2 - \left((x-1)^2\right)'\left(x^2 - 2x\right)}{(x-1)^4}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)\left((2x-2)(x-1) - 2\left(x^2-2x\right)\right)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(2x-2)(x-1) - 2\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2}{(x-1)^3}.
\end{aligned}
$$

Pastebime, kad $y'' \neq 0$, visiems $x \in R$ ir y'' neegzistuoja, kai $x = 1 \notin D(y)$.
Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty; 1)$	$(1; +\infty)$
y'' ženklas	$-$	$+$
y kitimas	$\cap$	$\cup$

$\cap$ žymime, kai kreivė iškila aukštyn; $\cup$ žymime, kai kreivė iškila žemyn.
Kreivė iškila aukštyn, kai $x \in (-\infty; 1)$, iškila žemyn, kai $(1; +\infty)$.
Antrosios eilės išvestinė y'' keičia ženklą pereidama tašką $x = 1$, bet $x = 1 \notin D(y)$, todėl šis taškas nėra vingis.



4.4.1 pav. Funkcijos $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ grafikas

Atsakymas. Kreivė iškila aukštyn, kai $x \in (-\infty; 1)$, iškila žemyn, kai $(1; +\infty)$.

4.4.2 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$y = x \operatorname{arctg} x$$

grafiko iškilumo aukštyn ir žemyn intervalus.

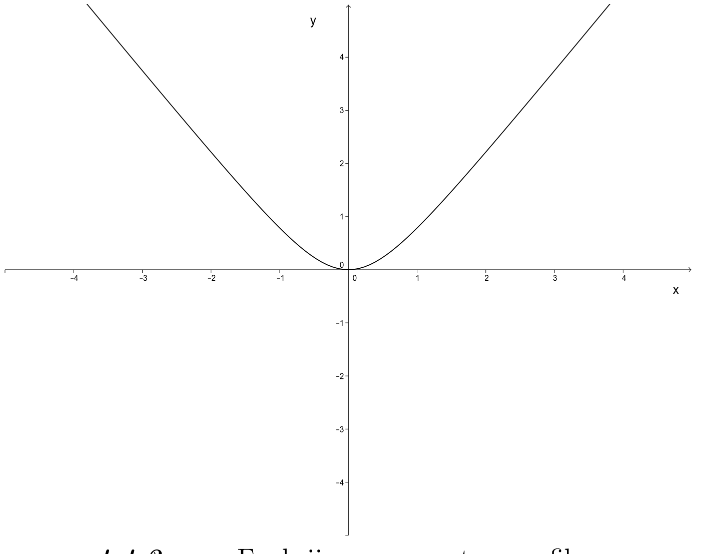
Sprendimas

Raskime funkcijos $y = x \operatorname{arctg} x$ pirmosios ir antrosios eilės išvestines:

$$y' = (x \operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2};$$

$$y'' = \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1+x^2+1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Funkcijos $y = x \operatorname{arctg} x$ antrosios eilės išvestinė nė viename taške nelygi nuliui, t. y. $\frac{2}{(1+x^2)^2} \neq 0$. Be to, y'' visiems x turi teigiamą ženklą. Vadinasi, intervale $(-\infty; +\infty)$ funkcijos grafikas yra iškilas žemyn.



4.4.2 pav. Funkcijos $y = x \operatorname{arctg} x$ grafikas

Atsakymas. Funkcijos grafikas iškilas žemyn, kai $(-\infty; +\infty)$.

3. Nustatykite kreivės $y = \sqrt[5]{x^7}$ iškilumo intervalus ir raskite perlinkio (vingio) taškus.

Sprendimas

Funkcijos apibrėžimo sritis: $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

$$y' = \left(\sqrt[5]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{5}}\right)' = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}.$$

Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{7}{5}\cdot\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{14}{25\sqrt[5]{x^3}}.$$

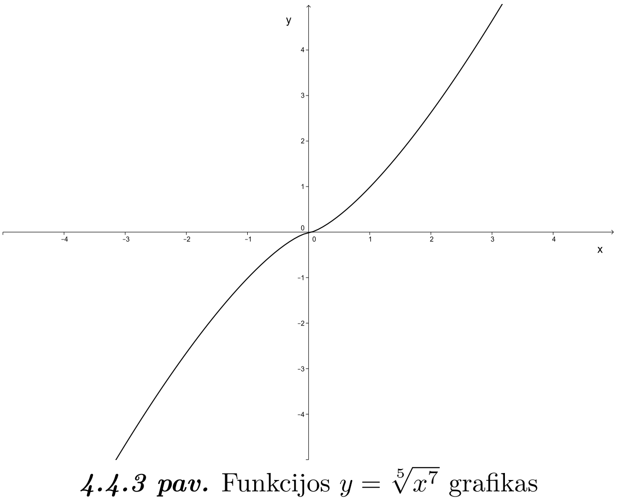
Pastebime, kad $y'' \neq 0$ su visais $x \in R$ ir funkcija y'' neegzistuoja, kai $x = 0$.

Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty; 0)$	$x = 0$	$(0; +\infty)$
y'' ženklas	–		$+$
y kitimas	iškila aukštyn $\cap$	vingio (perlinkio) taškas	iškila žemyn $\cup$

Kreivė iškila aukštyn, kai $x \in (-\infty;\ 0)$, iškila žemyn, kai $x \in (0;\ +\infty)$. Antrosios eilės išvestinė y'' keičia ženklą pereidama tašką $x = 0$, todėl šis taškas yra perlinkio taško abscisė. Apskaičiuojame perlinkio taško ordinatę:

$$y(0) = \sqrt[5]{0^7} = 0.$$



4.4.3 pav. Funkcijos $y = \sqrt[5]{x^7}$ grafikas

Atsakymas. Funkcijos grafikas iškilas aukštyn, kai$x \in (-\infty;\ 0)$,
iškilas žemyn, kai $x \in (0;\ +\infty)$
perlinkio taškas $A = (0;\ 0)$.

2.14 testas

$\boxed{1}$ Su kuriomis parametrų a ir b reikšmėmis taškas $M(-3,37)$ yra funkcijos $y = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x - 14$ grafiko vingio taškas?
① $a=-8,\ b=-18$; ② $a=-8,\ b=18$;
③ $a=8,\ b=18$; ④ tokių reikšmių nėra.

$\boxed{2}$ Nustatykite funkcijos $y = -21e^{-20x^2}$ grafiko iškilumo aukštyn sritį.
① $(0;+\infty)$; ② $\left(-\infty;-\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)\cup\left(\frac{1}{2\sqrt{10}};+\infty\right)$; ③ $(-\infty;+\infty)$;
④ $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; ⑤ $\left(-2\sqrt{10};0\right)$; ⑥ $\{0\}$;
⑦ $\left(-\frac{1}{2\sqrt{10}};\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$; ⑧ $\left(0;2\sqrt{10}\right)$; ⑨ $\left(-2\sqrt{10};2\sqrt{10}\right)$;

4.5. Funkcijos grafiko asimptotės

Tiesė vadinama **kreivės asimptote**, kai bet kurio kreivės taško atstumas iki tos tiesės artėja prie nulio, taškui tolstant kreive.

Tiesė $x = a$ vadinama funkcijos $f(x)$ grafiko **vertikaliąja asimptote**, jei bent viena iš ribų $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ ar $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ yra begalinė ($\pm\infty$).

Tiesė $y = kx + b$ vadinama funkcijos $f(x)$ grafiko **pasvirąja asimptote**, jei riba $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx+b)) = 0$. Pasvirosios asimptotės koeficientai k ir b randami iš lygybių:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ir } b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

Jei, apskaičiuodami koeficientus k ir b, sužinome, kad bent viena iš ribų yra begalinė arba neegzistuoja, tai funkcijos grafikas pasvirosios asimptotės <u>neturi</u>.

Kai koeficientas $k = 0$, tiesė $y = b$ vadinama **horizontaliąja asimptote**, kuri yra lygiagreti su O_x ašimi.

4.5.1 pavyzdys. Raskite funkcijos $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x^2}$ asimptotes.

Sprendimas
Apibrėžimo sritis $D\left(f\right)=\left(-\infty,\ 0\right)\cup\left(0,\ +\infty\right)$.
Kadangi taškas $x=0$ nepriklauso funkcijos $f\left(x\right)$ apibrėžimo sričiai, tai vertikalioji asimptotė gali būti tik šiame taške.
Vertikalioji asimptotė:
$x=0$
$$\lim_{x\to0-0}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)=\tfrac{-1}{+0}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to0+0}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)=\tfrac{-1}{+0}=-\infty.$$
Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to0\pm0}f\left(x\right)=-\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=0$ yra vertikalioji asimptotė.
Dabar ieškosime pasvirosios asimptotės.
Pasviroji asimptotė:
$y=kx+b$,
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x-1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x^3}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=0,$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2}-0\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$
Vadinasi, tiesė $y=0$ yra grafiko horizontalioji asimptotė (koeficientas $k=0$), kai $x\to-\infty$ arba $x\to+\infty$. Funkcijos grafikas nubrėžtas skyrelyje 4.6.

Atsakymas. Tiesė $x=0$ (ašis O_y) yra vertikalioji asimptotė,
tiesė $y=0$ (ašis O_x) yra grafiko horizontalioji asimptotė.

4.5.2 pavyzdys. Raskite funkcijos $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x-1}+x$ asimptotes.

Sprendimas
Apibrėžimo sritis $D\left(f\right)=\left(-\infty,\ 1\right)\cup\left(1,\ +\infty\right)$.
Kadangi taškas $x=1$ nepriklauso funkcijos $f\left(x\right)$ apibrėžimo sričiai, tai vertikalioji asimptotė gali būti tik šiame taške.
Vertikalioji asimptotė:
$x=1$,
$$\lim_{x\to1-0}\left(\frac{x}{x-1}+x\right)=\frac{1}{-0}+1=-\infty,$$
$$\lim_{x\to1+0}\left(\frac{x}{x-1}+x\right)=\frac{1}{+0}+1=+\infty.$$
Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to1-0}f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0}f\left(x\right)=+\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=1$ yra vertikalioji asimptotė.

Pasviroji asimptotė:
$y = kx + b$,
$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x}{x-1} + x}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{x-1} + 1 \right) = \dfrac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1,$
$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x}{x-1} + x - x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x}{x-1} \right)$
$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \dfrac{1}{1-0} = 1.$
Vadinasi, tiesė $y = x + 1$ yra grafiko pasviroji asimptotė, kai $x \to -\infty$ arba $x \to +\infty$. Funkcijos grafikas nubrėžtas skyrelyje 4.6.

Atsakymas. Tiesė $x = 1$ yra vertikalioji asimptotė, tiesė $y = x + 1$ yra grafiko pasviroji asimptotė.

2.15 testas

$\boxed{1}$ Raskite funkcijos $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x + 1}{x + 4}$ grafiko asimptotę, kai $x \to \infty$.
① $y = 5x + 18$; ② $y = 5x + 17$; ③ $y = 5x + \frac{17}{5}$;
④ $y = 5x - 18$; ⑤ $y = 5x - 17$; ⑥ $y = 5x - \frac{17}{5}$;.

Funkcijos $y = \dfrac{-12x^2 - 15x}{17x - 7}$ grafiko asimptotė, kai $x \to \infty$, yra tiesė $y = dx + b$.

$\boxed{2}$ $d =$
① $\frac{12}{17}$; ② $\frac{7}{15}$; ③ $-\frac{12}{17}$; ④ $\frac{15}{7}$; ⑤ $-\frac{15}{7}$; ⑥ $-\frac{7}{15}$; ⑦ $\frac{17}{12}$; ⑧ $-\frac{17}{12}$.

$\boxed{3}$ $b =$
① $\frac{301}{109}$; ② $-\frac{339}{289}$; ③ $-\frac{301}{109}$; ④ $\frac{289}{339}$; ⑤ $-\frac{109}{301}$; ⑥ $\frac{339}{289}$; ⑦ $-\frac{289}{339}$.

4.6. Funkcijų tyrimas ir grafikų brėžimas

1. Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį.
2. Nustatome, ar funkcija yra lyginė ar nelyginė, ar periodinė.
3. Randame monotoniškumo intervalus ir ekstremumus.
4. Nustatome funkcijos iškilumo intervalus ir perlinkio (vingio) taškus.
5. Randame asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.

6. Surandame funkcijos ribas, kai x tolsta į begalybes $\pm\infty$ ir artėja prie funkcijos apibrėžimo srities galų (jei funkcijos apibrėžimo sritis nėra $(-\infty;\ +\infty)$).
7. Nustatome, ar funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis, jei taip, surandame funkcijos grafiko susikirtimo su koordinačių ašimis taškus.
8. Brėžiame funkcijos grafiko eskizą.

Tiriant konkrečią funkciją, kai kuriuos klausimus galima praleisti, papildyti. Grafikui patikslinti galima papildomai parinkti keletą taškų.

4.6.1 pavyzdys. Ištirti funkciją ir nubrėžti jos grafiką $f\left(x\right) = \dfrac{x}{x-1} + x$.

Sprendimas

a) Nustatome apibrėžimo sritį, $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$.
Taigi $D\left(f\right) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\ \infty)$.

b) $f\left(-x\right) = \dfrac{-x}{-x-1} + (-x) = \dfrac{-x}{-x-1} - x = -\left(-\dfrac{x}{x+1} + x\right)$

$$f\left(-x\right) \neq f\left(x\right) \neq -f\left(x\right)$$

Funkcija $f\left(x\right) = \dfrac{x}{x-1} + x$ yra nei lyginė, nei nelyginė. Ji taip pat neperiodinė.

c) Randame funkcijos ekstremumus ir monotoniškumo intervalus.

$$\begin{aligned} f'\left(x\right) &= \left(\frac{x}{x-1} + x\right)' = \left(\frac{x}{x-1}\right)' + \left(x\right)' = \frac{\left(x\right)'\left(x-1\right) - \left(x-1\right)' x}{\left(x-1\right)^2} + 1 \\ &= \frac{\left(x-1\right) - x}{\left(x-1\right)^2} + 1 = \frac{-1}{\left(x-1\right)^2} + 1. \end{aligned}$$

$f'\left(x\right) = 0$, kai

$$\frac{-1}{\left(x-1\right)^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-1}{\left(x-1\right)^2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{\left(x-1\right)^2} = 1 \Rightarrow 1 = \left(x-1\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x\left(x-2\right) = 0,$$

$x_1 = 0, x_2 = 2$.
Pastebime, kad išvestinė neegzistuoja taške $x = 1 \notin D\left(f\right)$.
Sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;1)$	$(1;2)$	$x=2$	$(2;+\infty)$
f' ženklas	$+$		$-$	$-$		$+$
f kitimas	$\uparrow$	max	$\downarrow$	$\downarrow$	min	$\uparrow$

Taigi $f_{\max}(0)=\dfrac{1\cdot 0}{0-1}+1\cdot 0=0+0=0,\ f_{\min}(2)=\dfrac{1\cdot 2}{2-1}+1\cdot 2=2+2=4.$

d) Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-1}{(x-1)^2}+1\right)' = \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)' + (1)' \\ &= \frac{(-1)'(x-1)^2-\left((x-1)^2\right)'(-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Pastebime, jog $f''(x)\neq 0, \forall x\in R$. $f''(x)$ neegzistuoja, kai $x=1\notin D(f)$. Vadinasi vingio (perlinkio) taškų nėra.

Funkcijos iškilumo intervalams nustatyti sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ +\infty)$
f'' ženklas	$-$	$+$
f kitimas	iškila aukštyn $\cap$	iškila žemyn $\cup$

e) Randame asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.

Vertikalioji asimptotė:

$x=1$,

$\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\dfrac{x}{x-1}+x\right)=\dfrac{1}{-0}+1=-\infty,$

$\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{x}{x-1}+x\right)=\dfrac{1}{+0}+1=+\infty.$

Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=+\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=1$ yra vertikalioji asimptotė.

Pasviroji asimptotė:

$y=kx+b$,

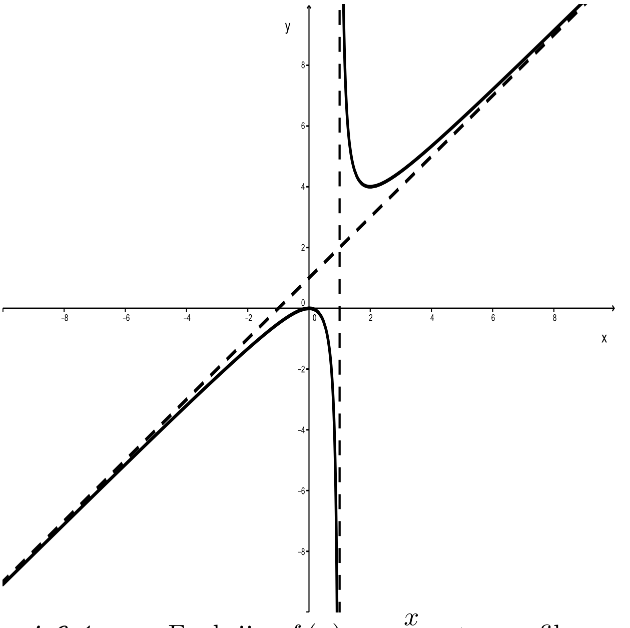
$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x-1}+x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-1}+1\right) = \frac{1}{\infty}+1=0+1=1, \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x-1}+x-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{1-0}=1. \end{aligned}$$

Vadinasi, tiesė $y=x+1$ yra grafiko pasviroji asimptotė, kai $x\to-\infty$ arba $x\to+\infty$.

f) Rasime grafiko susikirtimo taškus su O_x ir O_y ašimis:

$$\frac{x}{x-1}+x=0 \Leftrightarrow \frac{x+x^2-x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0.$$

$y=0$, kai $x=0$.
g) Remdamiesi gautais duomenimis, brėžiame grafiką.



4.6.1 pav. Funkcijos $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x-1}+x$ grafikas

4.6.2 pavyzdys. $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x^2}$.

Sprendimas
a) Nustatome apibrėžimo sritį, $x^2\neq 0$, $x\neq 0$. Taigi
$D\left(f\right)=\left(-\infty;\ 0\right)\cup\left(0;\ +\infty\right)$.
b) $f\left(-x\right)=\dfrac{2\left(-x\right)-1}{\left(-x\right)^2}=\dfrac{-2x-1}{x^2}=-\dfrac{2x+1}{x^2}\neq f\left(x\right)\neq -f\left(x\right)$.

Funkcija $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x^2}$ yra nei lyginė, nei nelyginė. Funkcija neperiodinė.
c) Randame funkcijos ekstremumus bei monotoniškumo intervalus.

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)'=\frac{\left(2x-1\right)'x^2-\left(x^2\right)'\left(2x-1\right)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{2x^2-2x\left(2x-1\right)}{x^4}$$

$$=\frac{-2x^2+2x}{x^4}=\frac{x(-2x+2)}{x^4}=\frac{2-2x}{x^3}.$$

$f'(x)=0$, kai

$$\frac{2-2x}{x^3}=0\Rightarrow 2-2x=0\Rightarrow -2x=-2\Rightarrow x=1.$$

Pastebime, jog išvestinė neegzistuoja taške $x=0\notin D(f)$.
Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalams bei ekstremumams nustatyti sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$x=1$	$(1;+\infty)$
f' ženklas	-	$+$		-
f kitimas	$\downarrow$	$\uparrow$	max	$\downarrow$

Taigi $f_{\max}(1)=\dfrac{2\cdot 1-1}{1^2}=1.$

d) Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, vingio taškus:

$$\begin{aligned} f''(x)=\left(\frac{2-2x}{x^3}\right)' &= \frac{(2-2x)'\,x^3-\left(x^3\right)'(2-2x)}{\left(x^3\right)^2} \\ &= \frac{-2\cdot x^3-3x^2(2-2x)}{x^6} \\ &= \frac{4x^3-6x^2}{x^6}=\frac{4x-6}{x^4}. \end{aligned}$$

$f''(x)=0$, kai

$$\frac{4x-6}{x^4}=0\Rightarrow 4x-6=0\Rightarrow 4x=6\Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Pastebime, jog $f''(x)$ neegzistuoja, kai $x=0\notin D(f)$.
Funkcijos iškilumo intervalams nustatyti sudarome lentelę:

Intervalai	$(-\infty;\ 0)$	$\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$	$x=\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$
f'' ženklas	$-$	$-$		$+$
f kitimas	iškila aukštyn $\cap$	iškila aukštyn $\cap$	vingio taškas	iškila žemyn $\cup$

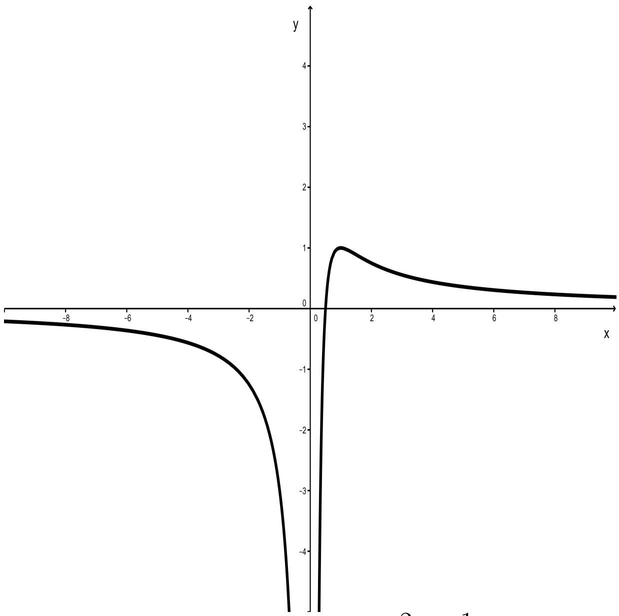
e) Randame asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.
Vertikalioji asimptotė:
$x=0$,
$\lim\limits_{x\to 0-0}\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)=\dfrac{-1}{+0}=-\infty,$
$\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)=\dfrac{-1}{+0}=-\infty.$
Kadangi ribos $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}f(x)=-\infty$ yra begalinės, tai tiesė $x=0$ yra vertikalioji asimptotė.

Pasviroji asimptotė:
$y = kx + b$,
$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{2x-1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x-1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) = 0,$
$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x-1}{x^2} - 0\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)$
$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 0.$

Vadinasi, tiesė $y = 0$ yra grafiko pasviroji asimptotė, kai $x \to -\infty$ arba $x \to +\infty$.
f) Rasime grafiko susikirtimo taškus su O_x ir O_y ašimis:

$$\frac{2x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$y = 0$, kai $x = \frac{1}{2}$.
g) Remdamiesi gautais duomenimis, brėžiame grafiką.



4.6.2 pav. Funkcijos $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$ grafikas

5. Kelių kintamųjų funkcijos

Raktiniai žodžiai: Kelių kintamųjų funkcijos tolydumas, dalinės išvestinės, diferencialas. Aukštesniųjų eilių išvestinės ir diferencialai. Ekstremumai. Mažiausių kvadratų metodas. Funkcijos ekonomikoje.
Literatūra: [Rum76] XXII skyrius, 378–394 p.; [Mis99] 192–198 p.; [Būd08] 183–250 p.; [Tho05] 965–1062 p.

5.1. Kelių kintamųjų funkcijos apibrėžimas

Kintamasis z vadinamas vienareikšme *dviejų kintamųjų x ir y funkcija* tam tikroje srityje, jei kiekvieną porą (x, y) iš tos srities atitinka vienintelė z reikšmė.

- Kintamieji x ir y vadinami **nepriklausomais kintamaisiais**.
- Žymime
$$z = f(x, y).$$

Funkcijos $z = f(x, y)$ **apibrėžimo sritimi** vadinama plokštumos Oxy taškų aibė, kurioje ta funkcija apibrėžta, t.y. įgyja konkrečias realiąsias reikšmes.

Dviejų kintamųjų funkcijos egzistavimo sritį galime pavaizduoti. Jeigu kiekvieną x ir y kintamųjų porą vaizduosime plokštumos xOy tašku $M(x, y)$, tai funkcijos apibrėžimo sritis bus tam tikra šios plokštumos taškų aibė. Atskiru atveju, suprantama, funkcijos egzistavimo sritis gali būti ir visa xOy plokštuma.
Geometriškai funkcijos $z = f(x, y)$ grafikas reiškia paviršių.
Pastaba. Analogiškai apibrėžiamos trijų ir daugiau kintamųjų funkcijos.

Jei kiekvienai tarpusavyje nepriklausančių kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aibei egzistuoja apibrėžta kintamojo w reikšmė, tai w vadinsime kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funkcija ir žymėsime $w = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5.2. Dalinės išvestinės

Jei x laikome kintamu, o y – pastoviu dydžiu, tai ribą

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\partial x}$$

vadiname funkcijos $z = f(x, y)$ **daline išvestine pagal** x taške (x, y).

Analogiškai, jei y laikome kintamu, o x – pastoviu dydžiu, tai ribą

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\partial y}$$

vadiname funkcijos $z = f(x,y)$ **daline išvestine pagal** y taške (x,y).

5.2.1 pavyzdys. Raskime funkcijos dalines išvestines duotame taške:

1. $z = x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3$, $(1;-1)$;
2. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $x \neq 0$, $(1;1)$;
3. $z = x^y$, $(e;1)$.

Sprendimas

1. $(y = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_x = 3x^2 + 2y^2 + 6yx;$$

$$\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x} = \frac{\partial z(1;-1)}{\partial x} = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.$$

$(x = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_y = 4xy + 3x^2 + 3y^2;$$

$$\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y} = \frac{\partial z(1;-1)}{\partial y} = 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 2.$$

2. $(y = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{y^2 + x^2};$$

$$\frac{\partial z(1;1)}{\partial x} = \frac{1}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}.$$

$(x = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2};$$

$$\frac{\partial z(1;1)}{\partial y} = -\frac{1}{1^2 + 1^2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Kai $y = const$, $z = x^y$ yra laipsninė funkcija, todėl

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = yx^{y-1}.$$

Kai $x = const$, tai $z = x^y$ yra rodiklinė funkcija, todėl

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x.$$

$$\frac{\partial z(e;1)}{\partial x} = 1 \cdot e^{1-1} = 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\frac{\partial z(e;1)}{\partial y} = e^1 \cdot \ln e = e \cdot 1 = e.$$

2.16 testas

Funkcija $z(x,y)$ apibrėžta formule $z(x,y) = -4x^7y^5 - 2\cos(-5x + 4y)$.

1 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$

① $-28x^8y^5+10\cos(-5x+4y)$; ② $-28x^8y^5-10\cos(-5x+4y)$;
③ $-28x^6y^5+10\sin(-5x+4y)$; ④ $-28x^6y^5+2\sin(-5x+4y)$;
⑤ $-28x^6y^5-10\sin(-5x+4y)$; ⑥ $-28x^6y^5-2\sin(-5x+4y)$.

2 $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

① $-20x^7y^4-8\sin(-5x+4y)$; ② $-20x^7y^6+8\cos(-5x+4y)$;
③ $-20x^7y^4-2\sin(-5x+4y)$; ④ $-20x^7y^4+8\sin(-5x+4y)$;
⑤ $-20x^7y^6-8\cos(-5x+4y)$; ⑥ $-20x^7y^4+2\sin(-5x+4y)$.

Diferencialo taikymas apytiksliams skaičiavimams

Diferencijuojamos funkcijos $z = f(x,y)$ pokyčio

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

pagrindinė tiesinė dalis

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

vadinama funkcijos diferencialu taške (x_0, y_0) ir žymima simboliu dz, t. y.

$$dz = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Nepriklausomų kintamųjų x ir y pokyčius Δx ir Δy laikykime jų diferencialais $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Taigi funkcijos diferencialas gali būti rašomas taip:

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

arba

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Panašiai, jei funkcija $u = f(x, y, z)$ turi tolydžias dalines išvestines $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, tai funkcijos pilnasis diferencialas išreiškiamas formule

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

kurioje $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$.

Diferencijuojamos funkcijos $z = f(x, y)$ pokytį

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

kai pokyčiai Δx ir Δy yra gana maži, galima apytiksliai pakeisti tos funkcijos diferencialu

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Tada gauname apytikslę lygybę

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

iš kurios, perkėlę $f(x_0, y_0)$ iš kairės į dešinę, gauname formulę

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Gautoji formulė bus tuo tikslesnė, kuo mažesni pokyčiai Δx ir Δy. Ją patogu taikyti funkcijos reikšmei $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ apskaičiuoti, kai žinome funkcijos $f(x, y)$ ir jos dalinių išvestinių reikšmes taške $(x_0; y_0)$.

5.2.2 pavyzdys. Užrašykime dviejų kintamųjų funkcijos

$$z = x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3$$

diferencialą taške $(1; 0)$ ir pritaikykime jį apytiksliam skaičiavimui.

<u>Sprendimas</u>
Užrašykime funkcijos $z = f(x, y)$ diferencialą taške (x_0, y_0) bendruoju atveju:

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Raskime funkcijos $z = f(x, y)$ išvestinę pagal x

$$f'_x(x, y) = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_x = 3x^2 + 2y^2 + 6xy.$$

Apskaičiuokime funkcijos $z = f(x, y)$ išvestinės pagal x reikšmę taške $(1; 0)$

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(1, 0) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1 \cdot 0 = 3.$$

Raskime funkcijos $z = f(x,y)$ išvestinę pagal y

$$f'_y(x,y) = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_y = 4xy + 3x^2 + 3y^2.$$

Apskaičiuokime funkcijos $z = f(x,y)$ išvestinės pagal y reikšmę taške $(1;0)$

$$f'_y(x_0,y_0) = f'_x(1;0) = 4 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0^2 = 3.$$

Užrašykime dviejų kintamųjų funkcijos

$$z = x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3$$

diferencialą taške $(1;0)$

$$dz = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy = 3dx + 3dy$$

ir pritaikykime jį apytiksliam skaičiavimui

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(1 + \Delta x, 0 + \Delta y) = f(1 + \Delta x, \Delta y) \\ &\approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y = 1 + 3\Delta x + 3\Delta y. \end{aligned}$$

Apskaičiuokime funkcijos $z = f(x,y)$ reikšmę taške $(1;0)$

$$f(x_0,y_0) = f(1;0) = 1.$$

Atsakymas. $dz = 3dx + 3dy$; $f(1 + \Delta x, \Delta y) \approx 1 + 3\Delta x + 3\Delta y$.

5.3. Aukštesniųjų eilių dalinės išvestinės

Funkcijos $z = f(x,y)$ dalinės išvestinės

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) \quad \text{ir} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$$

yra kintamųjų x ir y funkcijos. Šių funkcijų dalines išvestines vadiname funkcijos $f(x,y)$ **antrosios eilės dalinėmis išvestinėmis** ir žymime taip:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x,y)$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x,y)$ – mišrioji išvestinė,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x,y)$ – mišrioji išvestinė.

Pastaba. Panašiai apibrėžiamos ir aukštesniųjų eilių išvestinės.

Teorema. Jei antrosios eilės dalinės išvestinės tolydžios, tai jų reikšmės nepriklauso nuo diferencijavimo tvarkos, t.y.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

5.4. Kelių kintamųjų funkcijos ekstremumas

Taškas $T_0\,(x_0; y_0)$ vadinamas funkcijos $f(x,y)$ **lokaliuoju maksimumu**, jei egzistuoja tokia taško T aplinka

$$U_\delta^0 = \left\{(x,y):\ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\},$$

kad visiems taškams $(x,y) \in U_\delta^0$ galioja nelygybė

$$f(x,y) \leqslant f\,(x_0, y_0)\,. \tag{5.4.10}$$

Jei (5.4.10) nelygybę pakeistume tokia $f(x,y) \geqslant f\,(x_0, y_0)$, taškas T_0 būtų vadinamas funkcijos **lokaliuoju minimumu**.

Būtina ekstremumo sąlyga
Tarkime, kad funkcijos $f(x,y)$ dalinės išvestinės $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ir $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ tolydžios taške $T_0\,(x_0; y_0)$. Jei šis taškas yra funkcijos *ekstremumo* (maksimumo arba minimumo) taškas, tai

$$\frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Įrodymas. Tarkime, kad $y = y_0$. Tuomet $f(x,y)$ tampa vieno kintamojo funkcija, kuri taške x_0 turi ekstremumą. Vadinasi, funkcijos išvestinė x atžvilgiu tame taške turi būti lygi nuliui, bet ši išvestinė dviejų kintamųjų funkcijai yra jos dalinė išvestinė. Taigi $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Analogiškai galima įrodyti, kad $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$.

- Taškai, kuriuose funkcijos pirmosios eilės dalinės išvestinės lygios nuliui (arba neegzistuoja), vadinami *kritiniais*.

Tarkime, kad funkcijos $f(x,y)$ dalinės išvestinės $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ ir $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ yra tolydžios taške T_0. Pažymėkime:

$$A = \frac{\partial^2 f\,(x_0, y_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f\,(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 f\,(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Teorema (pakankama ekstremumo sąlyga). Jei taškas T_0 yra funkcijos $z = f(x, y)$ kritinis taškas, ir,

- Jeigu $AC - B^2 > 0$, tai taške T_0 yra ekstremumas: maksimumas, kai $A < 0$, ir minimumas, kai $A > 0$.
- Jeigu $AC - B^2 < 0$, tai taške T_0 ekstremumo nėra.
- Jeigu $AC - B^2 = 0$, tai reikia papildomo tyrimo. Taškas gali būti, bet gali ir nebūti ekstremumas.

Ekstremumo nustatymo taisyklė

- Nustatykite kritinius taškus. Tam reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

- Surandame antrąsias dalines išvestines

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- Kiekviename kritiniame taške T_0 apskaičiuojame determinantą Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

- Jei $\Delta > 0$, tai T_0 – ekstremumo taškas, ir jei $f''_{xx} < 0$ (arba $f''_{yy} < 0$), tai turime *maksimumą*, o jei $f''_{xx} > 0$ (arba $f''_{yy} > 0$) – *minimumą*.
- Jei $\Delta < 0$, tai ekstremumo taške T_0 nėra.
- Jei $\Delta = 0$, tai reikia tirti pokyčio Δf ženklą taško T_0 aplinkoje.

Pastaba

5.4.1. Jei visiems taškams T, artimiems taškui T_0, funkcijos pokytis $\Delta f = f(T) - f(T_0)$ *nekeičia ženklo* ir $\Delta f < 0$, tai turime *maksimumą*, o jei $\Delta f > 0$ – turime *minimumą*.

5.4.1 pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$ ekstremumus.

Sprendimas

1. Nustatome kritinius taškus. Pirmiausia randame išvestines pagal x ir y:

$$f'_x(x,y) = (x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6)'_x = 2x + 3y - 6.$$

$$f'_y(x,y) = (x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6)'_y = 3x + 6y + 3.$$

   Tuomet išsprendžiame sistemą:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

   Taigi

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0, | \cdot 2 \\ 3x + 6y + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow - \begin{cases} 4x + 6y - 12 = 0, \\ 3x + 6y + 3 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 15 = 0, \\ 3x + 6y + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15, \\ y = -8. \end{cases}$$

   Gauname kritinį tašką $A(15, -8)$.

2. Surandame antrąsias dalines išvestines:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) = (f'_x)'_x = (2x + 3y - 6)'_x = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y) = (f'_y)'_y = (3x + 6y + 3)'_y = 6,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = (f'_x)'_y = (2x + 3y - 6)'_x = 3.$$

3. Patikriname, ar surastas taškas yra ekstremumo taškas. Apskaičiuojame determinantą kritiniame taške $A(15, -8)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 9 = 3 > 0.$$

   $\Delta > 0$, tai $A(15, -8)$ – ekstremumo taškas.

4. Nustatome ekstremumo taško rūšį ir apskaičiuojame funkcijos reikšmę tame taške. Kadangi $f''_{xx} > 0$, vadinasi, $A(15, -6)$ yra minimumo taškas. $f_{min}(A) = f_{min}(15, -6) = 15^2 + 3 \cdot 15 \cdot (-6) + 3 \cdot (-6)^2 - 6 \cdot 15 + 3 \cdot (-6) - 6 = -51.$

Atsakymas. $f_{min}(15, -6) = -51.$

5.4.2 pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$ ekstremumus.

Sprendimas

1. Randame išvestines pagal x ir y:

$$f'_x(x,y) = (x^3 - y^3 - 2xy + 6)'_x = 3x^2 - 2y.$$

$$f'_y(x,y) = (x^3 - y^3 - 2xy + 6)'_y = -3y^2 - 2x.$$

Išsprendžiame sistemą ir randame kritinius taškus:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0, \\ -3y^2 - 2x = 0, | \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \cdot x^2, \\ 3 \cdot \left(\frac{3x^2}{2}\right)^2 + 2x = 0, \end{cases}$$

Sprendžiame sistemos antrąją lygtį:

$$\frac{27x^4}{4} + 2x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{27 \cdot x^3}{4} + 2\right) = 0,$$

$x_1 = 0,$
$\frac{27}{4} \cdot x^3 + 2 = 0, \Rightarrow x^3 = -\frac{2}{\frac{27}{4}} = -\frac{8}{27}, \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}.$
Kai $x_1 = 0$, tai $y_1 = 0$.
Kai $x_2 = -\frac{2}{3}$, tai $y_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$.
Gauname du kritinius taškus $A(0,0)$, $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. Apskaičiuojame antrąsias dalines išvestines

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) = (f'_x)'_x = (3x^2 - 2y)'_x = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y) = (f'_y)'_y = (-3y^2 - 2x)'_y = -6y,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y) = (f'_x)'_y = (3x^2 - 2y)'_y = -2.$$

3. Patikriname, ar surasti taškai yra ekstremumai.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{vmatrix} = -36xy - 4.$$

Apskaičiuojame determinantą kiekviename kritiniame taške:
Kadangi $\Delta(A) = \Delta(0,0) = -4 < 0$, tai taškas $A(0,0)$ nėra ekstremumas.
$\Delta(B) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -36 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} - 4 = 16 - 4 = 12 > 0$. Taškas $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ yra ekstremumo taškas.

4. Kadangi $f''_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -4 < 0$, tai šis taškas yra maksimumas.
$f_{max}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} + 6 = \frac{8}{27} + 6 = \frac{170}{27}$.

Atsakymas. $f_{max}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{170}{27}$.

2.17 testas

Pažymėkime: $f(x,y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 - 7x - 6y + 11$,

$A(a_x, a_y)$ – kritinis taškas – sistemos $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ (S) sprendinys,

$D(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$.

1 Sudarykite sistemą (S):

① $\begin{cases} 6x + 5y = 0, \\ 5x + 4y = 0 \end{cases}$; ② $\begin{cases} 11x - 7 = 0, \\ 9y - 6 = 0 \end{cases}$;
③ $\begin{cases} 6y + 5x = 0, \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}$; ④ $\begin{cases} 6x + 5y = -7, \\ 5x + 4y = -6 \end{cases}$;
⑤ $\begin{cases} 6x + 5y - 7 = 0, \\ 5x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$; ⑥ $\begin{cases} 6y + 5x - 7 = 0, \\ 4x + 5y - 6 = 0 \end{cases}$.

2 Raskite $A(a_x, a_y) =$
① $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$; ② $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; ③ $(1,1)$; ④ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;
⑤ $(2,-1)$; ⑥ $(1,-1)$; ⑦ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; ⑧ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

3 Apskaičiuokite $D(a_x, a_y) =$
① 26 ; ② 49 ; ③ $\frac{1}{49}$; ④ $-\frac{1}{20}$; ⑤ -20 ;
⑥ $-\frac{1}{49}$; ⑦ $\frac{3}{4}$; ⑧ 0 ; ⑨ $\frac{1}{3}$; ⓪ -1 .

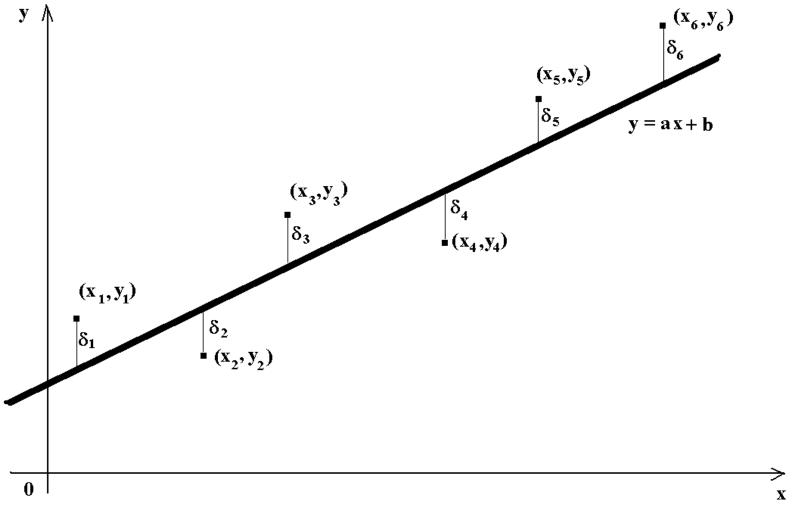
$\boxed{4}$

Kuris teiginys yra teisingas?
(A) taškas $A\,(a_x, a_y)$ nėra funkcijos $f(x, y)$ ekstremumas;
(B) funkcija $f(x, y)$ turi du ekstremumus;
(C) taškas $A\,(a_x, a_y)$ yra funkcijos minimumas.

① (B) ;	② (A) ir (C) ;	③ (A) ir (B) ;	④ (C) ;
⑤ (B) ir (C) ;	⑥ visi trys ;	⑦ (A) ;	⑧ nė vienas .

5.5. Mažiausių kvadratų metodas

Tarkime, kad žinomos n funkcijos $y = f(x)$ reikšmių $y_1 = f\,(x_1)$, $y_2 = f\,(x_2)$, $\cdots$, $y_n = f\,(x_n)$. Ieškosime tiesinės funkcijos $y = ax + b \approx f(x)$ parametrų a, b.



5.5.1 pav.

Pažymėkime (žr. 5.5.1 pav.)

$$\delta_j = ax_j + b - y_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

ir sudarykime funkciją

$$f(a, b) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(ax_j + b - y_j\right)^2 .$$

Ieškome jos minimumo:

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = 2 \sum_{j=1}^{n} \left(ax_j + b - y_j\right) x_j = 0,$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(ax_j + b - y_j\right) = 0.$$

Gauname dviejų tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b = b_1, \\ a_{21}a + a_{22}b = b_2. \end{cases} \tag{5.5.11}$$

Čia

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2, & a_{12} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j, & b_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j, \\ a_{21} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j, & a_{22} = n, & b_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j. \end{array}$$

Išspręskime (5.5.11) sistemą Kramerio metodu. Skaičius

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

vadinamas antrosios eilės *determinantu*. Sudarykime dar du antrosios eilės determinantus

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

(5.5.11) sistemos sprendinys išreiškiamas Kramerio formulėmis

$$a = \frac{D_1}{D},\ b = \frac{D_2}{D}.$$

Taigi

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right)}{n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2}, \\ b &= \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j\right)}{n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

5.5.1 pavyzdys. Pardavimų apimtis buvo stebima penkis mėnesius ir duomenys pateikiami lentelėje

x_j	1	2	3	4	5
y_j	$4,05$	$4,96$	$6,01$	$7,04$	$7,99$

Sudarykime pardavimų apimties prognozę ir apskaičiuokime y_6.

Sprendimas

Apskaičiuojame

$$\sum_{j=1}^{5} x_j = 1+2+3+4+5 = 15,$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_j^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55,$$
$$\sum_{j=1}^{5} y_j = 4,05+4,96+6,01+7,04+7,99 = 30,05,$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_j y_j = 1\cdot 4,05+2\cdot 4,96+3\cdot 6,01+4\cdot 7,04+5\cdot 7,99 = 100,11$$

ir taikome (5.5.12) formules:

$$a = \tfrac{5\cdot 100,11-15\cdot 30,05}{5\cdot 55-15^2} = \frac{49,80}{50,0} = 0,996,$$
$$b = \tfrac{55\cdot 30,05-15\cdot 100,11}{5\cdot 55-15^2} = \frac{151,10}{50,0} = 3,022.$$

Taigi gauname prognozės funkciją $y(x) = 0,996x + 3,022$ ir apskaičiuojame

$$y_6 = y(6) = 0,996\cdot 6 + 3,022 = 8,998 \approx 9,0.$$

Atsakymas. Prognozės funkcija $y(x) = 0,996x + 3,022$, $y(6) \approx 9,0$.

2.18 testas

Prekės paklausa buvo stebima penkis atsitiktinai pasirinktus metų mėnesius. Stebėjimų rezultatai pateikti lentelėje:

x_j	1	4	5	6	8
y_j	240	253	248	260	272

;

čia x_j – mėnesio numeris, y_j – prekės paklausa (vienetais). Sudarykite regresijos lygtį $y(x) = ax + b$ ir apskaičiuokite prognozuojamas pardavimų apimtis.

1 $a =$

① 28.081; ② 4.388; ③ -39.685; ④ 48.769; ⑤ -39.745.

2 $b =$

① 189.404; ② 257.23; ③ 189.464; ④ 277.918; ⑤ 233.537.

3 $y(2) =$

① 242.313; ② 198.24; ③ 266.006; ④ 198.18; ⑤ 286.694.

4 $y(9) =$

① 228.897; ② 296.723; ③ 273.03; ④ 228.957; ⑤ 317.411.

5.6. Mažiausių kvadratų metodo apibendrinimas

Nagrinėsime dviejų kintamųjų x ir y funkciją

$$u(x,y) = x^{\alpha}\, y^{\beta}. \tag{5.6.13}$$

5.6.1 pavyzdys. Žinomos kelios (5.6.13) funkcijos reikšmės

x	10	15	20	30	35
y	20	30	15	25	10
$u(x,y)$	14,9	21,8	12,8	20,4	9,9

Apskaičiuokime funkcijos parametrų α ir β reikšmes.

Sprendimas
Apskaičiuojame funkcijos $u(x,y)$ logaritmus

$$\ln u(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y \tag{5.6.14}$$

ir sudarome lentelę

$\ln x$	2,3026	2,7081	2,9957	3,4012	3,5553
$\ln y$	2,9957	3,4012	2,7081	3,2189	2,3026
$\ln u$	2,7014	3,0819	2,5494	3,0155	2,2925

Užrašykime mažiausių kvadratų funkciją

$$f(\alpha,\beta) = \sum_{j=1}^{5} \left(\alpha \ln x_j + \beta \ln y_j - \ln u_j\right)^2$$

ir apskaičiuokime jos dalines išvestines

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{j=1}^{5} \left(\alpha \ln x_j + \beta \ln y_j - \ln u_j\right) \ln x_j = 0,\\
\tfrac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \beta} &= 2 \sum_{j=1}^{5} \left(\alpha \ln x_j + \beta \ln y_j - \ln u_j\right) \ln y_j = 0.
\end{aligned}$$

Sprendžiame dviejų tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases}
\alpha \sum\limits_{j=1}^{5} \left(\ln x_j\right)^2 + \beta \sum\limits_{j=1}^{5} \ln y_j \ln x_j = \sum\limits_{j=1}^{5} \ln u_j \ln x_j,\\
\alpha \sum\limits_{j=1}^{5} \ln x_j \ln y_j + \beta \sum\limits_{j=1}^{5} \left(\ln y_j\right)^2 = \sum\limits_{j=1}^{5} \ln u_j \ln y_j.
\end{cases}$$

Gauname

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{j=1}^{5} \left(\ln x_j\right)^2 = 45,8185,\\
a_{12} &= a_{21} = \sum_{j=1}^{5} \ln y_j \ln x_j = \sum_{j=1}^{5} \ln x_j \ln y_j = 43,3557,\\
a_{22} &= \sum_{j=1}^{5} \left(\ln y_j\right)^2 = 43,5392,\\
b_1 &= \sum_{j=1}^{5} \ln u_j \ln x_j = 40,6107,\\
b_2 &= \sum_{j=1}^{5} \ln u_j \ln y_j = 40,4642
\end{aligned}$$

ir taikome Kramerio formules (žr. (5.5.11) sistemą)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45,8185 & 43,3557 \\ 43,3557 & 43,5392 \end{vmatrix} = 115,1850,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40,6107 & 43,3557 \\ 40,4642 & 43,5392 \end{vmatrix} = 13,8065,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45,8185 & 40,6107 \\ 43,3557 & 40,4642 \end{vmatrix} = 93,3017.$$

Taigi

$$\alpha = \frac{D_1}{D} = 0,12, \ \beta = \frac{D_2}{D} = 0,81.$$

Atsakymas. $\alpha = 0,12$, $\beta = 0,81$.

5.6.1 pavyzdys. Akcijos kaina laiko momentais $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ buvo atitinkamai $k_1 = 18.53$, $k_2 = 17.64$, $k_3 = 16.27$ [Eur]. Regresijos lygties $k(t) = a\,t + b$ koeficientus a, b raskite spręsdami sistemą $\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial b} = 0$, čia $F(a,b) = \sum_{j=1}^{3} (k_j - a\,t_j - b)^2$.
Raskite kainos prognozę $k(4)$.

<u>Sprendimas</u>
Užrašykime funkciją

$$F(a,b) = (18.53 - a\cdot 1 - b)^2 + (17.64 - a\cdot 2 - b)^2 + (16.27 - a\cdot 3 - b)^2 .$$

Sudarome sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = -2\,(18.53 - a - b) - 4\,(17.64 - 2a - b) - 6\,(16.27 - 3a - b) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = -2\,(18.53 - a - b) - 2\,(17.64 - 2a - b) - 2\,(16.27 - 3a - b) = 0. \end{cases}$$

Pertvarkome sistemą taip:

$$\begin{cases} (1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3)a + (1+2+3) = 18.53\cdot 1 + 17.64\cdot 2 + 16.27\cdot 3, \\ (1+2+3)a + (1+1+1)b = 18.53 + 17.64 + 16.27. \end{cases}$$

Sistemos matricinis pavidalas yra

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102.62 \\ 52.44 \end{pmatrix}.$$

Sprendžiame sistemą Kramerio metodu:

$$D = \begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6,\ D_a = \begin{vmatrix} 102.62 & 6 \\ 52.44 & 3 \end{vmatrix} = -6.78,\ D_b = \begin{vmatrix} 14 & 102.62 \\ 6 & 52.44 \end{vmatrix} = 118.44,$$

$$a = \frac{D_a}{D} = -1.130,\ b = \frac{D_b}{D} = 19.740.$$

Taigi regresijos lygtis yra $k(t) = -1.130t + 19.740$ ir prognozuojama akcijos kaina $k(4) = 15.22$ [Eur].

Atsakymas. $k(4) = 15.22$ [Eur].

5.7. Kobo ir Duglo funkcija

Ekonomikoje vartotojo naudingumas[13] dažnai modeliuojamas Kobo[14] ir Duglo[15] funkcija

$$u(x, y) = ax^{\alpha} y^{1-\alpha}. \tag{5.7.15}$$

Čia x yra pirmosios prekės vartojamas kiekis, y – antrosios.

Kreivės $u(x, y)$ – *const*. reiškia, kad prekių rinkiniai turi vartotojo požiūriu vienodą naudingumą ir vadinamos **abejingumo kreivėmis**. Tarkime, kad žinomos kelios kintamųjų u, x, y reikšmės. Pertvarkome (5.7.15) reiškinį

$$\ln u(x, y) = \ln a + \alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y$$

ir pažymėję $\beta = \ln a$, sudarome mažiausių kvadratų funkciją

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha \ln \left(\frac{x_j}{y_j} \right) + \beta - \ln \left(\frac{y_j}{u_j} \right) \right)^2. \tag{5.7.16}$$

2.19 testas

Uždaviniui spręsti gali būti naudinga:
$\ln 2 \approx 0,693$ $\ln 3 \approx 1,099$ $\ln 5 \approx 1,609$
$\ln 7 \approx 1,946$ $\ln 11 \approx 2,398$ $\ln 13 \approx 2,565$

Pirmenybės aibėje $x \geq 0$, $y \geq 0$ apibrėžtos Kobo ir Duglo naudingumo funkcija $f(x, y) = x^{\delta} y^{1-\delta}$.

[13] Jis išreiškiamas pinigais.
[14] Charles Wiggins Cobb (1875–1949) – amerikiečių matematikas ir ekonomistas.
[15] Paul Howard Douglas (1892–1976) – amerikiečių ekonomistas.

1 Raskite δ, jei taškai (2,10) ir (5,9) priklauso vienai abejingumo kreivei.

① -0.10; ② -0.08; ③ 0.10; ④ 0.02; ⑤ -0.02;
⑥ -0.05; ⑦ 0; ⑧ 1; ⑨ 0.08; ⓪ 0.05.

2 Kuris teiginys yra teisingas?

(T_1) (2,10) $\prec$ (3,8);
(T_2) (5,9) $\prec$ (9,4);
(T_3) (3,8) $\prec$ (9,4).

① nė vienas; ② (T_1) ir (T_2);
③ (T_1) ir (T_3); ④ (T_3);
⑤ visi teiginiai; ⑥ (T_2);
⑦ (T_2) ir (T_3); ⑧ (T_1).

6. Neapibrėžtinis integralas

Raktiniai žodžiai: Pirmykštė funkcija, neapibrėžtinis integralas. Neapibrėžtinio integralo savybės. Neapibrėžtinių integralų lentelė. Integravimo metodai. Racionaliųjų, iracionaliųjų ir trigonometrinių funkcijų integravimas. Kompleksinio skaičiaus sąvoka.

Literatūra: [Apy01] 67–74 p.; [Būd08] 251–266 p.; [Kry03] 7–47 p.; [Pek05] 223–249 p.; [Rum76] XIX skyrius, 330–350 p.; [Urb05] 653–668 p., 694–699 p.

6.1. Pirmykštė funkcija

Funkcija $F(x)$ vadinama funkcijos $f(x)$, $x \in (a, b)$ **pirmykšte**, jeigu $(\forall x \in (a, b))$ ji yra diferencijuojamoji[16] ir jos išvestinei yra teisinga lygybė

$$F'(x) = f(x).$$

6.1.1 pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją:
a) $f(x) = -3\sin(3x + 2) \Rightarrow\ F(x) = \cos(3x + 2)$.
b) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$.

Įrodykime, kad $F(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{kai } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{kai } x < 0. \end{cases}$

Turime: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ (\ln(-x))' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.
c) $f(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow\ F(x) = e^{x^2}$.

Kadangi $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, $(\forall\ C - \mathit{const})$, tai, pridėdami prie pirmykštės funkcijos $F(x)$ bet kurią konstantą, gauname kitą pirmykštę funkciją, t. y. **pirmykščių funkcijų yra be galo daug**.

[16]Priminsime, kad funkciją $f(x)$ vadiname diferencijuojamąja, kai

$$f(x + \triangle x) - f(x) = df(x) + o(\triangle x),$$

ir ši lygybė yra teisinga, kai ji turi išvestinę $f'(x)$.

Teorema. Jei $F_1(x)$ ir $F_2(x)$ yra dvi funkcijos $f(x)$, $x \in (a,b)$ *pirmykštės* funkcijos, tai jų **skirtumas lygus konstantai**:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

<u>**Įrodymas**</u>
Pažymėkime $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Funkcija $\Phi(x)$ yra diferencijuojamoji intervale (a,b) ir jos išvestinė lygi nuliui:

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ \forall x \in (a,b).$$

Imame bet kurį skaičių $x_0 \in (a,b)$ ir taikome Lagranžo[17] formulę:
$\forall x \in (a,b) \exists c \in (x_0, x)$ (arba $c \in (x, x_0)$):
$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \Phi'(c)(x - x_0) = 0 \cdot (x - x_0) = 0.$
Taigi $\Phi(x) = \Phi(x_0) = C - const.$ Arba $F_1(x) - F_2(x) = C.$

6.2. Neapibrėžtinio integralo sąvoka

Visų pirmykščių funkcijų aibė $\{F(x)+C\}$ yra vadinama funkcijos $f(x)$ **neapibrėžtiniu integralu** ir žymima

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

- Funkcija $f(x)$ vadinama *pointegraline funkcija*,
- reiškinys $f(x)dx$ – *pointegraliniu reiškiniu*,
- kintamasis x – *integravimo kintamuoju.*

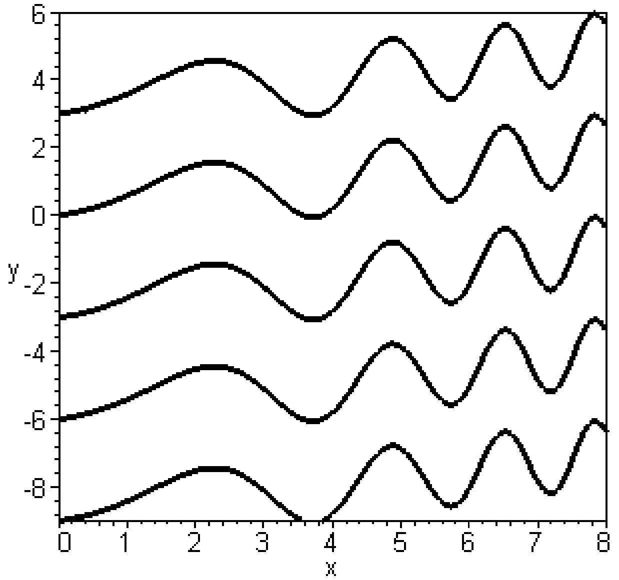
Pirmykštės funkcijos radimo veiksmas vadinamas *integravimu.*

Pavyzdžiui, $\int e^x dx = e^x + C$, $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Visų pirmykščių funkcijų grafikai gaunami vienos kreivės postūmiu išilgai ordinačių (Oy) ašies (6.2.1 pav.).
Taigi per kiekvieną plokštumos tašką $A(x_0, y_0)$, kai $x_0 \in (a,b)$[18] ir $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, eina lygiai viena kreivė – pirmykštės funkcijos $F_0(x) = F(x)+C_0$ grafikas. Šią pirmykštę

[17] Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – prancūzų matematikas ir mechanikas.
[18] Visos pirmykštės funkcijos apibrėžtos, kai $x \in (a,b)$.

funkciją galima gauti iš sąlygos $F_0(x_0) = y_0$, kurią atitinka lygties $F(x_0) + C = y_0$ sprendinys C_0.



6.2.1 pav. *Pirmykštės funkcijos*

6.3. Neapibrėžtinio integralo savybės

1° $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2° $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3° $\int dF(x) = F(x) + C$
4° $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$
5° Jei $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija ($F'(x) = f(x)$) ir $a \neq 0$, tai $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}\, F(ax+b) + C$

Įrodymai

1°. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x);$

2°. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx;$

3°. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C;$

4°.
$$\left(\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\right)' = \left(\alpha \int f(x)dx\right)' + \left(\beta \int g(x)dx\right)' =$$
$$= \alpha \left(\int f(x)dx\right)' + \beta \left(\int g(x)dx\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x);$$

5°. $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'_y(y)|_{y=ax+b} = f(y) = f(ax+b).$

Pastabos

6.3.1. 1°, 2° ir 3° savybės rodo, kad integravimas ir diferencijavimas yra atvirkšti vienas kitam veiksmai.
6.3.2. 4° savybė yra vadinama *tiesiškumu*.
6.3.3. Pavyzdžiai **6.3.1** ir **6.3.2** rodo, kaip integruojant yra taikoma 5° savybė.

6.3.1 pavyzdys. $\int \sin(2x+3)dx$.

Sprendimas

$\int \sin(2x+3)dx = \begin{pmatrix} \text{žr. } 5° \text{ savybę:} \\ a=2,\ b=3 \\ f(y)=\sin y,\ F(y)=-\cos y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C.$

Atsakymas. $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+3)+C.$

6.3.2 pavyzdys. $\int (2x-3)dx$.

Sprendimas

$\int (2x-3)dx = \begin{pmatrix} a=2,\ b=-3 \\ f(y)=y,\ F(y)=\dfrac{y^2}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{(2x-3)^2}{4}+C.$

Atsakymas. $\dfrac{(2x-3)^2}{4}+C.$

Pastaba

Neapibrėžtinis integralas yra visų pirmykščių funkcijų aibė. Todėl, integruodami 2 integralą kitaip:

$$\int (2x-3)dx = \int 2xdx - \int 3dx =$$
$$= x^2 + C_1 - (3x + C_2) = x^2 - 3x + C_3,$$

gauname tą pačią formulę, jei tik pažymėsime

$$C_1 - C_2 = C_3 = C + \frac{9}{4}.$$

6.4. Neapibrėžtinių integralų lentelė

Elementariųjų funkcijų neapibrėžtinių integralų lentelė.

0. $$\int 0 \cdot dx = C$$

1. $$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$
$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$$

2. $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

3. $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

4. $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

5. $$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

6. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

7. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos \dfrac{x}{a} + C \end{cases} \qquad |x| < |a|, \quad a > 0$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} \qquad |x| < 1$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}} = \ln|x + \sqrt{A + x^2}| + C, \quad A + x^2 > 0$$

10. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C \end{cases} \qquad a \neq 0$$
$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

11. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad a \neq 0$$

Visas formules galima įrodyti tiesioginiu diferencijavimu.

Patikrinkime, pavyzdžiui, 9 formulę:

$$\left(\ln|x + \sqrt{A + x^2}|\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{A + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{A + x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{A + x^2}}.$$

6.5. Tiesioginis integravimas

Taikydami neapibrėžtinio integralo tiesiškumo savybę ir elementariųjų funkcijų integralų lentelę, integruojame šiuos integralus.

6.5.1 pavyzdys. $\int \left(5x^7 - 3\sin x + 4\sqrt[3]{x}\right) dx.$

Sprendimas

$$\int \left(5x^7 - 3\sin x + 4\sqrt[3]{x}\right) dx = 5\int x^7\,dx - 3\int \sin x\,dx + 4\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{5}{8}x^8 + C_1 + 3\cos x + C_2 + 4\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C_3 = \frac{5x^8}{8} + 3\cos x + 3\sqrt[3]{x^4} + C.$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Atsakymas. $\frac{5x^8}{8} + 3\cos x + 3\sqrt[3]{x^4} + C.$

6.5.2 pavyzdys. $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx.$

Sprendimas

$$\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2(x^2+1-1)}{1+x^2}\,dx = 2\int dx - 2\int \frac{dx}{1+x^2} = 2x - 2\operatorname{arctg} x + C.$$

Atsakymas. $2x - 2\operatorname{arctg} x + C.$

6.5.3 pavyzdys. $\int \left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx.$

Sprendimas

$$\int \left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(1 + 2\sqrt{x} + x\right)\, dx = \int dx + 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x\,dx$$

$$= x + 2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = x + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Atsakymas. $x + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^2 + C.$

6.5.4 pavyzdys. $\int \frac{4dx}{9+x^2}.$

Sprendimas

$$\int \frac{4dx}{9+x^2} = 4\int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Atsakymas. $\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$

6.5.5 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[3]{x}-2)\cdot(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt{x}}\,dx.$

Sprendimas

$$\int \frac{(\sqrt[3]{x}-2)\cdot(\sqrt[3]{x}+2)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(\sqrt[3]{x})^2-4}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx - \int \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{6}}\,dx - 4\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} - 4\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 8\sqrt{x} + C.$$

Atsakymas. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 8\sqrt{x} + C.$

6.6. Integravimas keičiant kintamąjį

Kai x yra ne nepriklausomas kintamasis, o kito kintamojo t funkcija, tai jo diferencialas $dx = x'(t)dt$ ir turime formulę:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt.}$$

6.6.1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{2x-2}{x^2-2x+13}\,dx.$

Sprendimas

Įveskime naują integravimo kintamąjį: $x^2-2x=u$.

Tada $du=(2x-2)\,dx$ ir

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+13}\,dx = \int \frac{du}{u+13} = \ln|u+13| + C = \ln(x^2-2x+13) + C.$$

Atsakymas. $\ln(x^2-2x+13)+C.$

Iš lygties $x^2-2x=u$ galima išreikšti $x = 1 \pm \sqrt{1+u}$ ir pakeisti kintamąjį $x = 1+\sqrt{1+u}$ (arba $x = 1-\sqrt{1+u}$). Tarkime, kad $x = 1+\sqrt{1+u}$. Tada $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{1+u}}$ ir pertvarkome integralą

$$\int \frac{2(1+\sqrt{1+u})-2}{(1+\sqrt{1+u})^2-2(1+\sqrt{1+u})+13}\cdot\frac{du}{2\sqrt{1+u}} = \int \frac{du}{u+13}.$$

Taigi gauname tą patį rezultatą.

6.6.1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{2x-2}{x^2-2x+13}\,dx.$

<u>Sprendimas</u>
Galima pastebėti, kad vardiklio diferencialas yra lygus skaitikliui: $d(x^2-2x+13) = (2x-2)dx$. Taigi

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+13}\,dx = \int \frac{du}{u+13} = \int \frac{d\left(x^2-2x+13\right)}{x^2-2x+13},$$

ir galime integruoti, atmintinai keisdami $x^2-2x+13=y$. Šis integravimo būdas vadinamas reiškinio ***įkėlimu po diferencialo ženklu***.

Svarbu

Norint funkciją įkelti po diferencialu, reikia tą funkciją **suintegruoti**.

Pateiksime keletą įkėlimo po diferencialo ženklu formulių:

$$\boxed{\int f(x)2x dx = \int f(x) dx^2} \qquad \boxed{\int \frac{f(x)dx}{x} = \int f(x) d\ln x}$$

$$\boxed{\int \frac{f(x)dx}{\cos^2 x} = \int f(x) d\operatorname{tg} x} \qquad \boxed{\int f(x)e^x\,dx = \int f(x) de^x}$$

$$\boxed{\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int f(x) d\arcsin x} \qquad \boxed{\int \frac{f(x)dx}{1+x^2} = \int f(x) d\operatorname{arctg} x}$$

6.6.3 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx.$

<u>Sprendimas</u>
$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{tg} x\, d\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$

6.6.4 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

<u>Sprendimas</u>
$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{\cos x} + C.$

6.6.5 pavyzdys. $\displaystyle\int \sin(3x+2)\,dx$.

<u>Sprendimas</u>

Pažymėkime $u = 3x + 2$. Tada $dx = \dfrac{1}{3}\,du$ ir turime

$$\int \sin(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{3}\cos(3x+2) + C$.

6.6.6 pavyzdys. $\displaystyle\int x^2 \sin x^3\,dx$.

<u>Sprendimas</u>

$$\int x^2\sin x^3\,dx = \left(\begin{array}{c}\text{keitinys: } x^3 = u\\ 3x^2\,dx = du,\ dx = \dfrac{du}{3}\end{array}\right) = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{\cos u}{3} + C$$
$$= -\frac{\cos x^3}{3} + C.$$

Atsakymas. $-\dfrac{\cos x^3}{3} + C$.

Pastabos

6.6.1. Taikydami 5° neapibrėžtinio integralo savybę, gauname **6.6.5** pavyzdžio rezultatą be keitinio $u = 3x + 2$.

6.6.2. **Su bet kuriais skaičiais** a **ir** b **(**$a \neq 0$**):** $\boxed{dx = \dfrac{1}{a}\,d(ax+b)}$.

Todėl galima integruoti, įkeliant reiškinį $3x + 2$ po diferencialo ženklu:

$$\int \sin(3x+2)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+2)d(3x+2).$$

6.6.7 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+9}}$.

<u>Sprendimas</u>

Keičiame $e^x + 9 = t^2$. Taigi $x = \ln(t^2 - 9)$, $dx = \dfrac{2tdt}{t^2-9}$ ir gauname

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+9}} = \int \frac{2tdt}{t(t^2-9)} = 2\int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{2}{3}\ln\frac{|t-3|}{|t+3|} + C$$
$$= \frac{2}{3}\ln\frac{\sqrt{e^x+9}-3}{\sqrt{e^x+9}+3} + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{\sqrt{e^x+9}-3}{\sqrt{e^x+9}+3} + C$.

6.6.8 pavyzdys. $\int \operatorname{tg} x dx$.

Sprendimas
$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

Atsakymas. $-\ln|\cos x| + C.$

6.6.9 pavyzdys. $\int (4x+7)^5\, dx$.

Sprendimas
$\int (4x+7)^5\, dx = \frac{1}{4}\int (4x+7)^5\, d\,(4x+7) = \frac{1}{4}\int t^5 dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^6}{6} + C$
$= \frac{1}{24}(4x+7)^6 + C.$

Atsakymas. $\frac{1}{24}(4x+7)^6 + C.$

6.6.10 pavyzdys. $\int \frac{dx}{(3x-5)^2}$.

Sprendimas
$\int \frac{dx}{(3x-5)^2} = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{-2}\, d\,(3x-2) = \frac{1}{3}\int t^{-2} dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C$
$= -\frac{1}{3t} + C = -\frac{1}{3\,(3x-2)} + C.$

Atsakymas. $-\frac{1}{3\,(3x-2)} + C.$

6.6.11 pavyzdys. $\int e^{2\cos x}\sin x dx$.

Sprendimas
$\int e^{2\cos x}\sin x dx = \int e^{2\cos x} d(-\cos x) = -\frac{1}{2}\int e^{2\cos x} d(2\cos x) = -\frac{1}{2}\int e^t dt$
$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{2\cos x} + C.$

Atsakymas. $-\frac{1}{2}e^{2\cos x} + C.$

6.7. Integravimas dalimis

Taikydami sandaugos diferencijavimo formulę

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

(arba jos kitą pavidalą $d(uv) = vdu + udv$) ir 3° neapibrėžtinio integralo savybę, gauname

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int d(uv) = uv = \int vdu + \int udv.$$

Taigi gavome integravimo dalimis formulę

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

arba kitą jos pavidalą

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx}$$

Šis metodas dažniausiai taikomas tuomet, kai reikia integruoti tokią dviejų funkcijų sandaugą: $P_n(x) \cdot f(x)$; čia $P_n(x)$ yra n-tojo laipsnio daugianaris ($n \geq 0$), o $f(x)$ – rodiklinė, logaritminė, trigonometrinė arba atvirkštinė trigonometrinė funkcija. Galima nurodyti dažniausiai pasitaikančius atvejus. Jei po integralu yra sandauga $P_n(x) \cdot f(x)$, kur

1. $f(x)$ – trigonometrinė funkcija, tai $u = P(x)$;
2. $f(x)$ – eksponentinė funkcija, tai $u = P(x)$;
3. $f(x)$ – logaritminė funkcija, tai $u = \ln(a \cdot x)$, kur a – realusis skaičius;
4. $f(x)$ – atvirkštinė trigonometrinė funkcija, tai $u = \arcsin(a \cdot x)$, $u = \operatorname{arctg}(b \cdot x)$ ..., kur a, b – realūs skaičiai.

6.7.1 pavyzdys. $\displaystyle\int x \sin 3x dx.$

Sprendimas

$$\int x \sin 3x dx = \left(\begin{array}{c} u = x \ \Rightarrow \ du = dx \\ dv = \sin 3x dx \ \Rightarrow \ v = \int \sin 3x dx = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right)$$

$$= -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

Atsakymas. $-\dfrac{x\cos 3x}{3} + \dfrac{1}{9}\sin 3x + C.$

6.7.2 pavyzdys. $\int \operatorname{arctg} x dx.$

Sprendimas

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{pmatrix} u = \operatorname{arctg} x \ \Rightarrow \ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \ \Rightarrow \ v = x \end{pmatrix} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C.$$

Atsakymas. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C.$

6.7.3 pavyzdys. $\int (x^2 - 3x) \cos x dx.$

Sprendimas

$$\int (x^2-3x) \cos x dx = \int (x^2-3x)\, d \sin x =$$
$$= (x^2-3x) \sin x - \int \sin x \cdot (2x-3)\, dx$$
$$= (x^2-3x) \sin x + \int (2x-3)\, d \cos x$$
$$= (x^2-3x) \sin x + (2x-3) \cos x - 2 \int \cos x dx$$
$$= (x^2-3x) \sin x + (2x-3) \cos x - 2 \sin x + C.$$

Atsakymas. $(x^2-3x) \sin x + (2x-3) \cos x - 2 \sin x + C.$

Pastaba

Spręsdami **6.7.3** pavyzdį, dalimis integravome du kartus ir gavome tiesiogiai integruojamą funkciją. Kitus du integralus **6.7.4** ir **6.7.5** irgi du kartus integruosime dalimis, tačiau gausime tą patį integralą (padaugintą iš tam tikro koeficiento). Pažymėję duotąjį integralą raide I, turėsime tiesinę algebrinę lygtį su nežinomuoju I. Išsprendę šią lygtį, gausime ieškomą neapibrėžtinį integralą.

6.7.4 pavyzdys. $\int \sin x\, e^{2x}\, dx.$

Sprendimas

$$I = \int \sin x e^{2x} dx = - \int e^{2x} d \cos x = -e^{2x} \cos x + 2 \int \cos x e^{2x} dx$$
$$= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} d \sin x = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int \sin x e^{2x} dx.$$

$$\Rightarrow \ I = e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - 4I$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x-\cos x\right)+C.$$

Atsakymas. $\frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x-\cos x\right)+C.$

6.7.5 pavyzdys. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx.$

Sprendimas

$$I=\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\begin{pmatrix} u=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ dv=dx\Rightarrow\ v=x\end{pmatrix}$$
$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$
$$=x\sqrt{x^2+1}-I+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

$$\Rightarrow\ I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)+C.$$

Atsakymas. $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)+C.$

6.8. Racionaliosios funkcijos

Racionaliąja trupmena vadinamas dviejų daugianarių santykis

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots a_{n_1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_{m_1}x+b_m}.$$

Čia $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – daugianariai, neturintys bendrų šaknų; n ir m yra daugianarių laipsniai, t. y. $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.

Trupmena vadinama **taisyklingąja**, kai $n<m$ (skaitiklyje esančio daugianario laipsnis yra mažesnis už vardiklyje esančio daugianario laipsnį), priešingu atveju trupmena vadinama **netaisyklingąja**.

Netaisyklingoji trupmena gali būti užrašyta taip:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S_k(x)+\frac{R_l(x)}{Q_m(x)}.$$

Čia $S_k(x)$ – daugianaris, kuris vadinamas trupmenos $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ **sveikąja dalimi**, o trupmena $\dfrac{R_l(x)}{Q_m(x)}$ jau yra taisyklingoji. Trupmenos sveikajai daliai išskirti dalijame daugianarį $P_n(x)$ iš daugianario $Q_m(x)$ panašiai, kaip dalijame „kampu" skaičius.

6.8.1 pavyzdys. Išskirkime trupmenos $\dfrac{5x^3-3x^2+6x-7}{x^2-4}$ sveikąją dalį.

<u>Sprendimas</u>

Dauginame x^2-4 iš $5x$, kad pašalintume $5x^3$:

$$\begin{array}{llr|l} 5x^3-3x^2 & +6x-7 & & x^2-4 \\ 5x^3 & -20x & & 5x \end{array}$$

Užrašome pirmąją liekaną:

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^3 & -3x^2 & +6x-7 \\ - & & & \\ & 5x^3 & & -20x \\ \hline & & -3x^2 & +26x-7 \end{array}$$

Toliau tęsiame dalijimą:

$$\begin{array}{lrrr|l} -3x^2+ & 26x & - & 7 & x^2-4 \\ -3x^2 & & + & 12 & -3 \end{array}$$

ir užrašome antrąją liekaną

$$\begin{array}{rrrr} & -3x^2 & +26x & -7 \\ - & & & \\ & -3x^2 & & +12 \\ \hline & & 26x & -19 \end{array}$$

Taigi

$$\frac{5x^3-3x^2+6x-7}{x^2-4} = 5x-3+\frac{26x-19}{x^2-4}.$$

Atsakymas. $\dfrac{5x^3-3x^2+6x-7}{x^2-4} = 5x-3+\dfrac{26x-19}{x^2-4}.$

6.8.2 pavyzdys. Pertvarkykime racionaliąją trupmeną

$$\frac{x^5+x^4+2x^3-x^2-3x}{x+1}.$$

Sprendimas

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^5 & +x^4 & +2x^3 & -x^2 & -3x \\
- & & & & & \\
 & x^5 & +x^4 & & & \\
\hline
 & & & 2x^3 & -x^2 & -3x \\
- & & & & & \\
 & & & 2x^3 & +2x^2 & \\
\hline
 & & & & -3x^2 & -3x \\
- & & & & & \\
 & & & & -3x^2 & -3x \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
&
\begin{array}{c}
x+1 \\
\hline
x^4+2x^2-3x
\end{array}
\end{array}
$$

Matome, kad daugianaris $x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x$ dalijasi iš $x + 1$ be liekanos:

$$x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x = (x^4 + 2x^2 - 3x) \cdot (x + 1).$$

Atsakymas. $(x^4 + 2x^2 - 3x) \cdot (x + 1)$.

6.9. Paprasčiausiųjų racionaliųjų trupmenų integravimas

Paprasčiausiomis racionaliosiomis trupmenomis vadinamos šios keturių tipų trupmenos:

- **(I)** $\dfrac{A}{x-a}$;
- **(II)** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;
- **(III)** $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;
- **(IV)** $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$.

Čia $A,\ B,\ p,\ q$ yra realieji skaičiai, $k \geqslant 2$ – natūralusis skaičius, $p^2 - 4q < 0$, t. y. III ir IV tipų trupmenų vardikliai **neturi** realiųjų šaknų.

Integruokime visų keturių tipų paprasčiausias trupmenas.

(I) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

(II) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Išskirkime III ir IV tipų trupmenų vardiklių pilnąjį kvadratą:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right),$$

ir pažymėkime $x+\dfrac{p}{2}=t$, $q-\dfrac{p^2}{4}=a^2>0$ (diskriminantas neigiamasis!).

$$\textbf{(III)}\ \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=A\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}$$
$$=\frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\frac{2B-Ap}{2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$
$$=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2B-Ap}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=$$
$$=A\ln\sqrt{x^2+px+q}+\frac{2B-Ap}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Pažymėkime $\int\dfrac{dt}{(t^2+a^2)^k}=I_k,\ k\geqslant 2$ ir perrašykime IV tipo integralą taip:

$$\textbf{(IV)}\ \int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx=A\int t\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$
$$=\frac{A}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}+I_k+C.$$

Integralą I_k integruojame dalimis:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\left(\begin{array}{c} u=\dfrac{1}{(t^2+a^2)^k}\ \Rightarrow\ du=-\dfrac{2ktdt}{(t^2+a^2)^{k+1}} \\ dv=dt\ \Rightarrow\ v=t\end{array}\right)=$$
$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+2k\int\frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt=$$
$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+2k\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}-2ka^2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}}=$$
$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+2kI_k-2ka^2I_{k+1}.$$

Taigi gavome rekurentinę formulę

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}\,I_k,\ k=1,2,\ldots.$$

Kadangi $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$, randame I_2 ir t. t.:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

6.9.1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$

<u>Sprendimas</u>

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{x^2+x+1} &= \int \frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}=t \\ x = t-\frac{1}{2},\ dx = dt \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Atsakymas. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

Tą patį rezultatą gausime, jei III tipo paprastosios trupmenos integravimo formulėje imsime $A = 1,\ B = 0,\ p = q = 1,\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{4\cdot 1-1}}.$$

6.9.2 pavyzdys. $\int \frac{2x-1}{x^2+6x+12}dx$

Sprendimas
Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį). Vardiklis yra kvadratinis trinaris x^2+x+1, kurio **diskriminantas yra neigiamas.** Todėl išskaidyti dauginamaisiais negalime. Tokiu atveju vardiklyje išskirsime pilnąjį kvadratą, t. y.

$$x^2+x+1 = x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\,.$$

Gauname:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2x-1}{x^2+6x+12}dx = \int \frac{2x-1}{(x+3)^2+3}dx = \begin{pmatrix} x+3=t, \\ x=t-3, \\ dx=d\,(t-3)=dt \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{2\,(t-3)-1}{t^2+3}dt = \int \frac{2t-7}{t^2+3}dt = 2\int \frac{t\,dt}{t^2+3} - 7\int \frac{dt}{t^2+3} \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3} - 7\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \ln\left(t^2+3\right) - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C \\
&= \ln\left(x^2+6x+12\right) - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{3}}+C\,.
\end{aligned}$$

Atsakymas. $\ln\left(x^2+6x+12\right) - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{3}}+C\,.$

6.10. Kompleksinio skaičiaus sąvoka

Kaip yra žinoma iš mokyklinės matematikos, lygtis

$$\boxed{i^2=-1}$$

neturi realiųjų sprendinių. Todėl formalusis šios lygties sprendinys $i=\sqrt{-1}$ nėra realusis skaičius ir vadinamas **menamuoju vienetu**.

Skaičius $z=x+iy$ vadinamas **kompleksiniu**, $x=\mathrm{Re}z$ – **realioji dalis**, $y=\mathrm{Im}z$ – **menamoji dalis**.

Veiksmai su kompleksiniais skaičiais atliekami kaip su algebriniais reiškiniais, atsižvelgiant į menamojo vieneto savybę $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(1+2i)\cdot(5-3i) &= 1\cdot 5 + 1\cdot(-3i) + 2i\cdot 5 + 2i\cdot(-3i) = \\ &= 5 - 6i^2 + i(-3+10) = 5 - 6\cdot(-1) + 7i = 11 + 7i.\end{aligned}$$

Kompleksinių skaičių aibėje kvadratinė lygtis

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

visada turi du sprendinius, kurie gali būti kartotiniai (lygūs).
Išskirkime kvadratinio trinario pilnąjį kvadratą

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0,$$

ir pažymėkime diskriminantą $D = b^2 - 4ac$. Tada

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \text{ ir } z + \frac{b}{2a} = \begin{cases} \pm\dfrac{\sqrt{D}}{2a}, & \text{kai } D \geq 0 \\ \pm i\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}, & \text{kai } D < 0. \end{cases}$$

Kompleksinis skaičius $\overline{z} = x - iy$ vadinamas skaičiaus $z = x + iy$ **jungtiniu**.

Pastaba

6.10.1.Jei kvadratinė lygtis su realiais koeficientais turi kompleksinę šaknį $z = \alpha + i\beta$, tai kompleksinis jungtinis skaičius $\overline{z} = \alpha - i\beta$ irgi yra tos lygties šaknis.

Pavyzdžiui, lygtis $x^2 + 2x + 5 = 0$ turi dvi šaknis $x_1 = -1 - 2i$ ir $x_2 = -1 + 2i$.

Pastaba

6.10.2. Neatsižvelgiant į tai, ar šaknys x_1, x_2 yra kompleksinės ar realiosios, kvadratinį trinarį visada galima išskleisti dauginamaisiais:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

6.11. Racionaliųjų funkcijų reiškimas paprasčiausiųjų trupmenų suma

Bet kuris m-tojo laipsnio daugianaris $Q_m(x)$ turi m kompleksinių šaknų[19], kurios gali būti ir kartotinės[20]. Tada

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m = \\ &= b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_s)^{k_s}. \end{aligned}$$

Čia $k_1 + k_2 + \cdots\ k_s = m$, $k_j \geqslant 1$. Jei kompleksinis skaičius $x_j = \alpha + i\beta$ yra daugianario su realiaisias koeficientais $Q_m(x)$ šaknis, tai tarp kitų jo šaknų $x_1, x_2, \ldots, x_s$ yra ir kompleksinis jungtinis skaičius[21] $\overline{x}_j = \alpha_j - i\beta_j$. Tada $(x-x_j)(x-\overline{x}_j) = x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2$ ir pažymėję $p_j = -2\alpha_j$, $q_j = \alpha_j^2 + \beta_j^2$, perrašome sandaugą taip:

$$\begin{aligned} Q_m(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_l^{k_l})(x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \times \\ \times(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}, \\ k_1+k_2+\cdots+k_l+2(s_1+s_2+\cdots+s_r) = m,\ k_j \geqslant 1,\ s_j \geqslant 1, \\ p_j^2 < q_j,\ j = 1, 2, \ldots, s_r. \end{aligned}$$

Tarkime, kad $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ taisyklingoji trupmena ($n < m$), tada egzistuoja tokie realieji skaičiai A_{11}, A_{21}, A_{1,k_1-1}, A_{21}, …, A_{l,k_l-1}, B_{11}, C_{11}, $\cdots$, B_{s_n,s_n-1}, C_{s_n,s_n-1}, kad

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =& \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \cdots + \\ &+ \frac{A_{k_l1}}{x-x_l} + \frac{A_{k_l2}}{(x-x_l)^2} + \cdots + \frac{A_{k_l,k_l-1}}{(x-x_l)^{k_l-1}} + \cdots + \\ &+ \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{1,s_1-1}x+C_{1,s_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}} + \cdots + \\ &+ \frac{B_{s_r1}x+C_{s_r1}}{x^2+p_{s_r}x+q_{s_r}} + \cdots + \frac{B_{s_r,s_r-1}x+C_{s_r,s_r-1}}{(x^2+p_{s_r}x+q_{s_r})^{s_r-1}}. \end{aligned}}$$

---

[19] Tai yra algebros pagrindinė teorema.

[20] Jei šaknis x_j yra k-tojo kartotinumo, tai

$$Q_m(x_j) = \frac{dQ_m(x_j)}{dx} = \frac{d^2Q_m(x_j)}{dx^2} = \cdots \frac{d^{k-1}Q_m(x_j)}{dx^{k-1}} = 0,\ \frac{d^kQ_m(x_j)}{dx^k} \neq 0.$$

[21] Tokio pat kartotinumo. Pastebėkime, kad iš čia išplaukia, jog bet kuris nelyginio laipsnio daugianaris $Q_1(x), Q_3(x), Q_5(x), \ldots$ turi bent vieną realiąją šaknį.

Taigi kiekvieną taisyklingąją trupmeną galima išskleisti paprasčiausiųjų keturių I, II, III, IV tipų trupmenų suma. Šios sumos pavidalas priklauso tik nuo trupmenos vardiklio $Q_m(x)$ šaknų: kiekvieną k–tojo kartotinumo šaknį atitinka lygiai k dėmenų, realiąją šaknį atitinka I ir II tipo paprasčiausiosios trupmenos, kompleksinę šaknį atitinka III ir IV tipo trupmenos.

6.11.1 pavyzdys. Nurodykime funkcijos

$$\frac{P_n(x)}{x^3(x+1)(x-2)^2(x^2+1)^2(x^2+4)}, \quad n < 12$$

reiškimo paprasčiausiųjų trupmenų suma bendrąjį pavidalą:

$$\frac{P_n(x)}{x^3(x+1)(x-2)^2(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{A_{11}}{x} + \frac{A_{12}}{x^2} + \frac{A_{13}}{x^3} + \frac{A_{21}}{x+1}$$
$$+ \frac{A_{31}}{x-2} + \frac{A_{32}}{(x-2)^2} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+1)^2} + \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2+4}.$$

6.12. Neapibrėžtųjų koeficientų metodas

Parodykime pavyzdžiais, kaip galima rasti skleidinių koeficientus.
6.12.1 pavyzdys. Raskime skleidinio

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{M}{x-1} + \frac{N}{x+2}$$

koeficientus M ir N.

Sprendimas
Perrašykime šią sumą bendravardiklėmis trupmenomis

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{M(x+2) + N(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

ir sulyginkime skaitiklius:

$$3x = (M+N)x + 2M - N.$$

Kadangi ši lygybė turi būti teisinga su visais realiaisias x, turime sulyginti vienodų x laipsnių koeficientus ir sudaryti tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} M + N = 3, \\ 2M - N = 0. \end{cases}$$

Iš čia gauname, kad $M = 1$, $N = 2$ ir

$$\frac{3x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}.$$

6.12.2 pavyzdys.

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x} = \frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$
$$= \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Sulyginame skaitiklius

$$2x^2-x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

ir užrašome tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} A+B+C=2, \\ A+2B-C=-1, \\ -2A=3. \end{cases}$$

Iš čia gauname $A=-\dfrac{3}{2}$, $B=\dfrac{4}{3}$, $C=\dfrac{13}{6}$ ir

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x} = -\frac{3}{2x} + \frac{4}{3(x-1)} + \frac{13}{6(x+2)}.$$

Parodykime, kaip kitaip galima gauti kai kurias tiesines lygtis neapibėžtiems koeficientams rasti. Šis kitas būdas vadinamas *atskirųjų reikšmių metodu* ir jo esmė – priskirti kintamajam x tokias reikšmes, kurioms esant greitai galima gauti tiesinę lygtį.

6.12.3 pavyzdys.

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{(x-1)^2\ x}.$$

Įrašome į lygtį

$$2x+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \qquad (*)$$

reikšmes $x=0$ ir $x=1$:

$$2\cdot 0+1 = 1 = A\cdot(0-1)^2 + B\cdot 0\cdot(0-1) + C\cdot 0\cdot 0 = A,$$
$$2\cdot 1+1 = 3 = 1\cdot(1-1)^2 + B\cdot 1\cdot(1-1) + C\cdot 1\cdot 1 = C.$$

Taigi gavome $A=1$, $C=3$. Reikšmei B rasti reikia turėti dar vieną lygtį, kurią galima gauti įvairiais būdais. Raskime $(*)$ lygybės abiejų pusių išvestines:

$$(2x+1)' = 2 = \big((x-1)^2 + Bx(x-1) + 3x\big)' =$$
$$= 2(x-1) + B(2x-1) + 3$$

ir įrašome $x=1$. Gauname $2=B+3$ ir

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2\ x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

6.13. Racionaliųjų funkcijų integravimo pavyzdžiai

Integruodami racionaliąją funkciją, atliekame šiuos veiksmus:
1) jei trupmena nėra taisyklingoji – išskiriama jos sveikoji dalis;
2) taisyklingoji trupmena išreiškiama paprasčiausių $I - IV$ tipų trupmenų suma su neapibrėžtais koeficientais;
3) surandamos skleidinio koeficientų reikšmės;
4) integruojamos paprasčiausios trupmenos.

6.13.1 pavyzdys. $I = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+5x+6}dx.$

Sprendimas
Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį).
Vardiklis yra kvadratinis trinaris $x^2 + 5x + 6$, kurio **diskriminantas yra teigiamas.**
Taigi $x^2 + 5x + 6$ galime išskaidyti dauginamaisiais. Tam tikslui apskaičiuojame kvadratinio trinario šaknis:

$$\begin{aligned}
&x^2 + 5x + 6 = 0,\\
&D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1,\\
&x_1 = \tfrac{-5+1}{2} = -2, \quad x_2 = \tfrac{-5-1}{2} = -3.
\end{aligned}$$

Taigi $x^2 + 5x + 6 = (x+2)\,(x+3)$.
Po integralu esančią taisyklingąją trupmeną išreikšime paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{x-1}{(x+2)\,(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}.$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} &= \frac{A\,(x+3) + B\,(x+2)}{(x+2)\,(x+3)}\\
&= \frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)\,(x+3)}.
\end{aligned}$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ 3\,(1-B)+2B=-1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} A = 1-B \\ -B=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=4 \\ A=-3 \end{cases}.$$

Taigi gavome, kad $A=-3,\ B=4$.
Tuomet

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x-1}{x^2+5x+6} = \int \left(\frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x+3} \right) dx = -3 \int \frac{dx}{x+2} + 4 \int \frac{dx}{x+3} \\ &= -3 \int \frac{d\,(x+2)}{x+2} + 4 \int \frac{d\,(x+3)}{x+3} = -3 \ln|x+2| + 4 \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

Atsakymas. $\ln \dfrac{(x+3)^4}{|x+2|^3} + C.$

6.13.2 pavyzdys. $I = \displaystyle\int \frac{4x-2}{x\,(x^2-2x+2)}\,dx.$

Sprendimas

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį). Vardiklyje yra kvadratinis trinaris x^2-2x+2, kurio diskriminantas yra neigiamas, todėl pointegralinę funkciją išreikšime tokia paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{4x-2}{x\,(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}.$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\begin{aligned} \frac{4x-2}{x\,(x^2-2x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{A\,\left(x^2-2x+2\right)+(Bx+C)\,x}{x\,(x^2-2x+2)} \\ &= \frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2+Cx}{x\,(x^2-2x+2)} \\ &= \frac{x^2\,(A+B)+x\,(-2A+C)+2A}{x\,(x^2-2x+2)}. \end{aligned}$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A+C=4 \\ 2A=-2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} A=-1 \\ B=-A=1 \\ C=4+2A=4-2=2 \end{array} \right. .$$

Taigi gavome, kad $A=-1$, $B=1$, $C=2$.
Tuomet

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x-2}{x\left(x^2-2x+2\right)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1\cdot x+2}{x^2-2x+2} \right) dx \\ &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\,dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Integralą I_1 jau galime suintegruoti:

$$I_1 = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C_1.$$

Kadangi kvadratinio trinario x^2-2x+2 diskriminantas yra neigiamas, tai turime išskirti pilnąjį kvadratą, t. y. $x^2-2x+2 = \left(x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1^2\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$. Tuomet

$$I_2 = \int \frac{x+1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)^2+1}\,dx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1=t, \\ x=t+1, \\ dx = d\,(t+1) = dt \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{t+1+2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t+3}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \int \frac{3\,dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} + 3\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + 3\,\mathrm{arctg}\ t + C_2 \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right) + 3\,\mathrm{arctg}\ (x-1) + C_2. \end{aligned}$$

Taigi randame duotąjį integralą I:

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 &= -\ln|x| + C_1 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right) + 3\,\mathrm{arctg}\ (x-1) + C_2 \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right) + 3\,\mathrm{arctg}\ (x-1) + C, \\ &\text{kur } C = C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Atsakymas. $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right) + 3\,\mathrm{arctg}\ (x-1) + C.$

6.13.3 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x}{x^2+x-2}\,dx.$

Sprendimas

$$\frac{x^3+x^2+x}{x^2+x-2} = \frac{x^3+x^2+x}{(x-1)(x+2)} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x}{x^2+x-2}\,dx = \int x dx + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + 2\ln|x+2| + C.$$

Atsakymas. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + 2\ln|x+2| + C.$

6.13.4 pavyzdys. $\int \frac{x^2-3x-5}{x^3+2x^2+x+2}\,dx.$

<u>Sprendimas</u>

$$\int \frac{x^2-3x-5}{x^3+2x^2+x+2}\,dx = \int \frac{dx}{x+2}\,dx - 3\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \ln|x+2| - 3\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

Atsakymas. $\ln|x+2| - 3\,\mathrm{arctg}\,x + C.$

6.13.5 pavyzdys. $\int \frac{3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}\,dx.$

<u>Sprendimas</u>

$$\int \frac{3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}\,dx = \int \frac{dx}{x+2}\,dx + \int \frac{2xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \ln|x+2| + \ln(x^2+1) - \mathrm{arctg}\,x + C.$$

Atsakymas. $\ln|x+2| + \ln(x^2+1) - \mathrm{arctg}\,x + C.$

6.13.6 pavyzdys. $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx.$

<u>Sprendimas</u>

$$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\,x + C.$$

Atsakymas. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\,x + C.$

6.14. Integralai $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \cdots, \sqrt[n_i]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i}}, \cdots\right) \mathbf{dx}$

Tarkime, kad $P(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ yra daugianariai. Pažymėkime

$$R(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

Tokios funkcijos vadinamos *racionaliosiomis*. Pastebėkime, kad visi algebriniai reiškiniai su kintamaisiais $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ir keturiais aritmetikos veiksmais $(+, -, \times, :)$ yra racionaliosios funkcijos. Toliau šiame skyriuje $R(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ žymima racionalioji funkcija.

Pažymėkime $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^n}$, kai n yra skaičių $n_1, n_2, \ldots, n_k$ mažiausiasis bendrasis kartotinis: $q_j = \dfrac{n}{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Tada

$$x = \frac{t^n d - b}{a - ct^n}, \; dx = \frac{(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2}\, dt, \; \sqrt[n_j]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_j}} = t^{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

ir integralą perrašome taip:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \cdots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) dx = \int \tilde{\mathrm{R}}(t)dt.$$

Čia $\tilde{\mathrm{R}}(t)$ yra vieno kintamojo racionalioji funkcija:

$$\tilde{\mathrm{R}}(t) = R\left(\frac{t^n d - b}{a - ct^n}, t^{q_1}, \ldots, t^{q_k}\right) \frac{(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2}.$$

Pastaba. Jei turime integralą $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, ..., \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right) dx$, tai keitinys, kuriuo iracionalioji funkcija suvedama į racionaliąją funkciją, yra toks: $\sqrt[s]{x} = t$. Čia skaičius s yra trupmenų $\frac{m_1}{n_1}, ..., \frac{m_k}{n_k}$ **bendras vardiklis**.

6.14.1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

Sprendimas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = \int \sqrt{\frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2}}\, dx$$
$$= \int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)}.$$

Čia $a = 1,\ b = -2,\ c = 1,\ d = -1,\ k = 1,\ m_1 = 1,\ n_1 = n = 2,\ q_1 = 1$. Todėl gauname

$$\frac{x-2}{x-1} = t^2,\ x = \frac{2-t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{2tst}{(1-t^2)^2},$$
$$x-1 = \frac{1}{1-t^2},\ x-2 = \frac{t^2}{1-t^2}$$

ir perrašome integralą taip:

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{2t^2(1-t^2)^2 dt}{t^2(1-t^2)^2} = 2\int dt = 2t + C$$
$$= 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C.$$

Atsakymas. $2\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}} + C.$

6.14.2 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\, dx.$

Sprendimas

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\, dx = \int \frac{x + x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}\, dx =$$
$$\left(\begin{array}{c} p_1 = \dfrac{2}{3},\ p_2 = \dfrac{1}{6},\ p_3 = \dfrac{1}{3} \\ \\ n = 6,\ x = t^6,\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right)$$
$$= \int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6\,(t^2+1)}\, 6t^5 dt = = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{t^2+1}\, dt = 6\int \left(t^3 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt$$
$$= \frac{3}{4}t^4 + 6\operatorname{arctg} t + C = \frac{3}{4}t^4 + 6\operatorname{arctg} t + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$

6.14.3 pavyzdys. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\,(\sqrt{x} + 2\ \sqrt[4]{x} + 4)}.$

Sprendimas

Kadangi trupmenų $\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{4}$ bendras vardiklis yra 4, tai, norėdami iracionaliąją trupmeną suvesti į racionaliąją trupmeną, darome tokį keitinį: $\sqrt[4]{x} = t$.
Tuomet

$$x = t^4, \quad x^{\frac{1}{2}} = t^2, \quad x^{\frac{1}{4}} = t,$$

$$dx = d\left(t^4\right) = 4t^3 dt\,.$$

Gautas išraiškas įkėlę į pradinį integralą, gauname

$$I=\int\frac{dx}{x\,(\sqrt{x}+2\,\sqrt[4]{x}+4)}=\int\frac{4t^3dt}{t^4\,(\,t^2+2\,t+4)}=\int\frac{4dt}{t\,(\,t^2+2\,t+4)}.$$

Po integralu turime taisyklingąją trupmeną (skaitiklio laipsnis yra mažesnis už vardiklio laipsnį).
Kadangi kvadratinis trinaris $t^2+2\,t+4$ realių šaknų neturi (diskriminantas neigiamas), tai pointegralinę trupmeną išreikšime paprastųjų (elementariųjų) trupmenų suma:

$$\frac{4dt}{t\,(\,t^2+2\,t+4)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+2\,t+4}.$$

Subendravardiklinę ir atlikę veiksmus gauname:

$$\begin{aligned}\frac{4\,dt}{t\,(\,t^2+2\,t+4)}&=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+2\,t+4}\\&=\frac{A\,\left(t^2+2\,t+4\right)+(Bt+C)\,t}{t\,(\,t^2+2\,t+4)}\\&=\frac{At^2+2At+4A+Bt^2+Ct}{t\,(\,t^2+2\,t+4)}.\end{aligned}$$

Skaitikliuose sulyginę koeficientus prie vienodų t laipsnių, gauname lygčių sistemą:

$$\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\2A+C=0\\4A=4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}B=-A\\C=-2A\\A=1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}B=-1\\C=-2\\A=1\end{array}\right..$$

Išsprendę lygčių sistemą, gauname, kad $A=1\,,\;B=-1\,,\;C=-2$.
Taigi turime

$$\begin{aligned}I=\int\frac{4dt}{t\,(\,t^2+2\,t+4)}&=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{-1\cdot t+(-2)}{t^2+2\,t+4}\right)dt\\&=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t+2}{t^2+2\,t+4}\right)dt\\&=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{t+2}{t^2+2\,t+4}\,dt=I_1-I_2.\end{aligned}$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C_1=\ln\left(\sqrt[4]{x}\right)+C_1.$$

Skaičiuodami integralą I_2, vardiklyje išskirsime pilnąjį kvadratą, t. y. $t^2+2t+4=t^2+2\cdot1\cdot t+1+3=(t+1)^2+3$
ir atliksime keitinį

$$\begin{aligned}
&t+1=z,\\
&t=z-1,\\
&dt=d\,(z-1)=(z-1)'\,dz=dz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{t+2}{t^2+2\,t+4}\,dt = \int \frac{t+2}{(t+1)^2+3}\,dt\\
&= \int \frac{(z-1)+2}{z^2+3}\,dz = \int \frac{z+1}{z^2+3}\,dz\\
&= \int \frac{zdz}{z^2+3} + \int \frac{dz}{z^2+3}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(z^2+3\right)}{z^2+3} + \int \frac{dz}{z^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\,\ln\left(z^2+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}} + C_2\\
&= \frac{1}{2}\,\ln\left((t+1)^2+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{3}} + C_2\\
&= \frac{1}{2}\,\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}} + C_2.
\end{aligned}$$

Taigi gavome, kad

$$\begin{aligned}
I = I_1 - I_2 &= \ln\left(\sqrt[4]{x}\right) + C_1 - \frac{1}{2}\,\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}} + C_2\\
&= \ln\left(\sqrt[4]{x}\right) - \frac{1}{2}\,\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}} + C,
\end{aligned}$$

čia $C = C_1 + C_2$.

Atsakymas. $\ln\left(\sqrt[4]{x}\right) - \frac{1}{2}\,\ln\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{3}} + C$

6.15. Integralai $\int \mathbf{R}(\sin\mathbf{x}, \cos\mathbf{x})\mathbf{dx}$

Priminsime, kad visur $R(u,v)$ žymima racionalioji funkcija.

Keitinys

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t} \qquad x = 2\operatorname{arctg}t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

vadinamas **universaliuoju trigonometriniu keitiniu**.

Pastebėję, kad

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

gauname vieno kintamojo t racionaliosios funkcijos $\tilde{\mathrm{R}}(t)$ integralą:

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \tilde{\mathrm{R}}(t)dt.}$$

6.15.1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Sprendimas

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(5-4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$
$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{2-t} + C = \frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$

Universalųjį trigonometrinį keitinį galima taikyti visais atvejais, tačiau kai kada galimi ir kiti, dažnai veiksmingesni, **trigonometriniai keitiniai**. Kai funkcija $R(u, v)$ atitinka atvejį:

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, $\boxed{\cos x = t}$,
$\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, $\boxed{\sin x = t}$,
$\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$,

$$\boxed{\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.}$$

Kai funkcija $R(\sin x, \cos x)$ yra nelyginė *sinuso* atžvilgiu, keičiame $\boxed{\cos x = t}$;
kai nelyginė *kosinuso* atžvilgiu – $\boxed{\sin x = t}$;
kai funkcija $R(u,v)$ yra lyginė abiejų kintamųjų atžvilgiu
$R(-u,-v) = R(u,v)$ – keičiame $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$.

6.15.2 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x}$.

Sprendimas

Kadangi $\dfrac{1}{2\sin^2 x(-\cos x)} = -\dfrac{1}{2\sin^2 x \cos x}$, pointegralinė funkcija atitinka antrąjį atvejį ir keičiame $\sin x = t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x} &= \int \frac{\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{2t^2\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{2t^2(1-t^2)} \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1-t^2}\right) dt = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\ &= -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.\end{aligned}$$

Atsakymas. $-\dfrac{1}{2\sin x} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$

Integruojant trigonometrines funkcijas, dažnai taikomos šios tapatybės

$$\begin{gathered}\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right); \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right); \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right); \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).\end{gathered}$$

6.15.3 pavyzdys. $\int \sin 3x \sin 5x dx$.

Sprendimas
$\displaystyle\int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\, dx = = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

Atsakymas. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

6.15.4 pavyzdys. $\displaystyle\int \cos^4 x dx.$

Sprendimas

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
= \int \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\, dx \\
= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx \\
= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.
\end{aligned}$$

Atsakymas. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

6.16. Integralai $\int \mathbf{R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx}$

Čia $R(x, y)$ – racionalioji funkcija, $a \neq 0$. Pakeiskime integravimo kintamąjį:

$$\boxed{u = x + \frac{b}{2a}},\ du = dx,\ ax^2 + bx + c = a\left(u^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Pažymėkime diskriminantą $b^2 - 4ac = D$ ir išnagrinėkime visus[22] galimus atvejus:
1) $a > 0$, $D > 0$;
2) $a > 0$, $D < 0$;
3) $a < 0$, $D > 0$;
4) $a < 0$, $D < 0$ (funkcijos apibrėžimo sritis yra tuščioji aibė $\emptyset$).
Pažymėję $c - \frac{b^2}{4a} = l^2$ (kai diskriminantas $D > 0$) arba $c - \frac{b^2}{4a} = -l^2$ $(D < 0)$, gausime tokius integralus:

[22] Jei diskriminantas $D = 0$ $(a > 0)$, reiškinys po šaknimi yra pilnasis kvadratas: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Todėl $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R\left(x, \pm\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right)$ yra racionalioji funkcija.

1) $\int \mathrm{R}(u, \sqrt{u^2 - l^2})du$ – keitinys: $\boxed{u = \dfrac{l}{\sin t}}$ arba $\boxed{u = \dfrac{l}{\cos t}}$

2) $\int \mathrm{R}(u, \sqrt{u^2 + l^2})du$ – keitinys: $\boxed{u = l\,\mathrm{tg}\,t}$ arba $\boxed{u = l\cot t}$

3) $\int \mathrm{R}(u, \sqrt{l^2 - u^2})du$ – keitinys: $\boxed{u = l\sin t}$ arba $\boxed{u = l\cos t}$

6.16.1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

Sprendimas

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}} = \begin{pmatrix} u = x+2 \\ dx = du \\ x^2+4x+7 = u^2+3 \end{pmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}}.$$

Atliekame keitinį

$$u = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t,\ du = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\ dt,\ u^2+3 = \frac{3}{\cos t}$$

ir gauname

$$\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\ dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos t}\right)^3} = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}} + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{u}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{3}}} + C = \frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}} + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}} + C.$

Pastaba

6.16.1. Nagrinėjamiems integralams galima taikyti Oilerio keitinius:
1) kai $a > 0$, keičiame $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$;
2) kai $c > 0$, keičiame $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{c} \pm xt$;
3) kai $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, keičiame
$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx_j,\ j = 1, 2$.
Jei kvadratinis trinaris ax^2+bx+c atitinka kelis atvejus, galima taikyti kelis keitinius. Tačiau sėkmingas keitinio (ir ženklo $\pm$) parinkimas gali smarkiai sumažinti darbo apimtį.

6.17. Integralai $\int \mathbf{x^m\,(a+bx^n)^p\,dx}$

Tokio pavidalo reiškiniai, kai m, n ir p yra racionalieji skaičiai, vadinami **diferencialiniu dvinariu**. Pakeiskime integravimo kintamąjį
$x^n = t$, $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \dfrac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}$:

$$\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\,(a+bt)^p\,dt = \\ = \frac{1}{n}\int t^q\,(a+bt)^p\,dt.$$

Čia pažymėta $\dfrac{m+1}{n} - 1 = q$. Jei q, p arba $q+p$ yra sveikasis skaičius, integralas turi jau išnagrinėtą pavidalą. Keisdami kintamąjį, gauname racionalųjį reiškinį[23]:

1) p – sveikasis skaičius: keitinys $\boxed{x^n = t}$

2) q – sveikasis skaičius: keitinys $\boxed{a+bx^n = t^s}$
($p \cdot s$ – sveikasis, t. y. $p = \dfrac{p_1}{s}$)

3) $p+q$ – sveikasis skaičius: keitinys $\boxed{\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^n}$

6.17.1 pavyzdys. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int x^{-2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

<u>Sprendimas</u>

Kadangi $m = -2$, $n = 2$, $p = -\dfrac{1}{2}$, $s = 2$, $q = \dfrac{-2+1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$ turime trečiąjį atvejį: $p+q = -2$ yra sveikasis skaičius. Keičiame kintamąjį: $-x^{-2}+1 = t^2$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $dx = t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}dt$. Taigi integralas pertvarkomas taip:

$$\int \frac{(1-t^2)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}t(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}}{t}\,dt = \int dt = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

Atsakymas. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$

Pastaba

6.17.1. Skaičius $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$ yra sveikasis tada ir tik tada, kai sveikasis yra skaičius $\dfrac{m+1}{n}$. Todėl 2) ir 3) atvejus galima pakeisti: $\dfrac{m+1}{n}$ arba $\dfrac{m+1}{n} + p$ yra sveikasis skaičius.

Pastaba

6.17.2. Integralai $\int \cos^q x \sin^m x dx$, kai q ir m yra racionalieji skaičiai, pertvarkomi taip:

$$\int \cos^q x \sin^m x dx = \begin{pmatrix} \sin x = z \\ \cos x = (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \cos x dx = dz \end{pmatrix} =$$

$$= \int \sin^m x \cos^{q-1} x \cos x dx = \int z^m \left(1-z^2\right)^{\frac{q-1}{2}} dz.$$

Taigi šis integralas išreiškiamas elementariosiomis funkcijomis, kai turime vieną iš trijų atvejų:

1) q yra nelyginis skaičius;
2) m yra nelyginis skaičius;
3) $q+m$ yra lyginis skaičius.

6.18. Neišreiškiami elementariosiomis funkcijomis integralai

Jei funkcija $f(x)$ yra tolydžioji, kai $x \in (a,b)$, tai ji turi pirmykštę funkciją $F(x)$: $\forall x \in (a,b)$ $F'(x) = f(x)$. Tačiau iš to neišplaukia, kad $F(x)$ išreiškiama elementariosiomis funkcijomis. Jau išnagrinėtas diferencialinio dvinario integralas $\int x^m(a+bx^n)^p\, dx$, neišreiškiamas elementariosiomis funkcijomis, kai nė vienas iš šių trijų skaičių p, $\frac{m+1}{n}$ ir $\frac{m+1}{n}+p$ nėra sveikasis. Kitaip sakome, kad jis neintegruojamasis. Pateiksime dar keletą neintegruojamųjų integralų pavyzdžių:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x}\, dx, \int \frac{1-\cos x}{x}\, dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx.$$

Kai kurios iš neelementariųjų pirmykščių funkcijų yra vadinamos **specialiosiomis**. Jos gerai ištirtos ir taikomos taip, kaip ir elementariosios funkcijos.

6.18.1 pavyzdys. **Integraliniu sinusu** vadinama funkcija $\mathrm{Si}(x)$, atitinkanti sąlygas $\mathrm{Si}'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $\mathrm{Si}(0) = 0$. Raskime apytikslę integralinio sinuso reikšmę $\mathrm{Si}(0,5)$.

<u>Sprendimas</u>
Užrašome funkcijai $\sin x$ Teiloro[24] formulę:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x)$$

[24]Brook Taylor (1685–1731) – anglų matematikas.

ir integruojame reiškinį:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x)\right)dx \approx$$

$$\approx \int \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right)dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}.$$

Taigi

$$\mathrm{Si}(x) \approx x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600},$$

$$\mathrm{Si}(0,5) \approx 0,5 - \frac{0,5^3}{18} + \frac{0,5^5}{600} = 0,4931.$$

Šioje formulėje $|R_7(x)| \leqslant \dfrac{x^7}{7!}$ ir apskaičiuotoji funkcijos reikšmė užrašyta su visais tiksliais skaitmenimis:

$$|\mathrm{Si}(0,5) - 0,4931| < 0,5\cdot 10^{-4}.$$

6.18.2 pavyzdys. Funkcija **integralinis kosinusas** $\mathrm{Ci}(x)$ apibrėžiama taip:

$$\mathrm{Ci}(x) = \ln x + \gamma - \mathrm{Cin}(x),\ \ \mathrm{Cin}'(x) = \frac{1-\cos x}{x},\ \ \mathrm{Cin}(0) = 0.$$

Čia $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = 0,5772156649\ldots$ – Oilerio ir Maskeronio[25] konstanta. Taikant Teiloro formulę funkcijai $\cos x$:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

panašiai gauname

$$\mathrm{Ci}(x) \approx \ln x + \gamma + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + \cdot + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)\cdot(2n)!},$$

$$\mathrm{Ci}(0,75) \approx \ln 0,75 + 0,5772 + \frac{0,75^2}{4} - \frac{0,75^4}{24} = 0,727.$$

Frenelio[26] **integralai** apibrėžiami kaip tokios pirmykštės funkcijos:

$$\mathrm{C}'(x) = \cos\frac{\pi x^2}{2},\ \ C(0) = 0,$$

$$\mathrm{S}'(x) = \sin\frac{\pi x^2}{2},\ \ S(0) = 0.$$

[25] Lorenzo Mascheroni (1750–1800) – italų matematikas.

[26] Augustin Jean Fresnel (1788–1827) – prancūzų inžinierius ir fizikas.

6.18.3 pavyzdys. $\int \sin e^x dx$.

Sprendimas
$\int \sin e^x dx = \int \frac{\sin e^x}{e^x}\, de^x = Si(e^x) + C.$

Atsakymas. $Si(e^x) + C.$

6.18.4 pavyzdys. $\int \sin 5x^2 dx$.

Sprendimas
$\int \sin 5x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{10}} \int \sin \frac{\pi t^2}{2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{10}} S(5x^2) + C.$

Atsakymas. $\sqrt{\frac{\pi}{10}} S(5x^2) + C.$

6.19. Savarankiško darbo užduotys

2.5 užduotis

Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, atitinkančią sąlygą $F(x_0) = F_0$:
1. $f(x) = \sin x,\ F(0) = 0;$
2. $f(x) = \cos x,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$
3. $f(x) = \frac{1}{1+4x^2},\ F(0) = 0.$

Raskite funkciją $F(x)$:

4. $F'(x) = (2x+3)^5,\ F(-1) = \frac{1}{12};$
5. $F'(x) = \sqrt[3]{2-x},\ F(2) = 0.$

Apskaičiuokite $F(x_1)$, kai $F'(x) = f(x)$ ir $F(x_0) = F_0$:

6. $f(x) = \sqrt{3-2x},\ x_0 = 1,\ F_0 = 0,\ x_1 = \frac{3}{2};$
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}},\ x_0 = 0,\ F_0 = 1,\ x_1 = 1.$

Integruokite

8. $\displaystyle\int \frac{3dx}{5+x^2};$ **9.** $\displaystyle\int \frac{3dx}{\sqrt{4-16x^2}};$ **10.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x}}.$

2.6 užduotis

Integruokite, taikydami tiesioginio integravimo metodą:

1. $\displaystyle\int \left(4x^2 - 5x + 7\right) dx$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[4]{x^5}} dx$;

3. $\displaystyle\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$; **4.** $\displaystyle\int 3^x \left(1 + \frac{3^{-x}}{x}\right) dx$;

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

2.7 užduotis

Integruokite, keisdami kintamąjį

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; **3.** $\displaystyle\int x \cdot \sqrt[3]{3+x^2} dx$;

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; **5.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(1-4\ln x\right)}$; **6.** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x - 5}} dx$.

2.8 užduotis

Integruokite dalimis

1. $\displaystyle\int \arccos x dx$; **2.** $\displaystyle\int x^2 e^{3x} dx$; **3.** $\displaystyle\int x^2 \arcsin x dx$;

4. $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$; **5.** $\displaystyle\int \frac{x-1}{\cos^2 x} dx$.

2.9 užduotis

Integruokite racionaliąsias trupmenas:

1. $\displaystyle\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-10x+16}$; **4.** $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}\, dx$;

5. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)} dx$.

2.10 užduotis

Integruokite

1. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{6-x^2}}$; **2.** $\displaystyle\int \sqrt{5-3x^2} dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1} du$;

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2}}$; **6.** $\displaystyle\int \sin 3x \cos 7x dx$;

7. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; **8.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3\cos x}$;

7. Apibrėžtinis integralas

Raktiniai žodžai: Apibrėžtinis integralas ir jo savybės. Niutono ir Leibnico formulė. Integravimo metodai.
Literatūra: [Apy01] 61–79 p.; [Būd08] 270–283 p.; [Kry03] 61–78 p.; [Pek05] 237–262 p.; [Rum76] XX skyrius, 354–369 p.; [Urb05] 669–678 p.

7.1. Apibrėžtinio integralo sąvoka

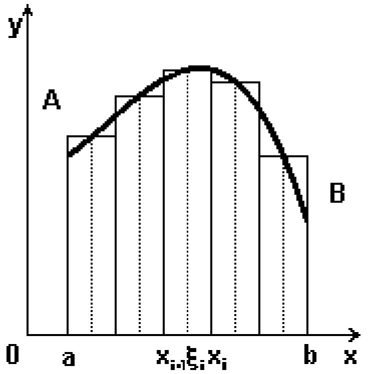
Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ apibrėžta, kai $x \in [a, b]$. Atkarpos $[a, b]$ **skaidiniu** vadinama baigtinė taškų $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ aibė, kai

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

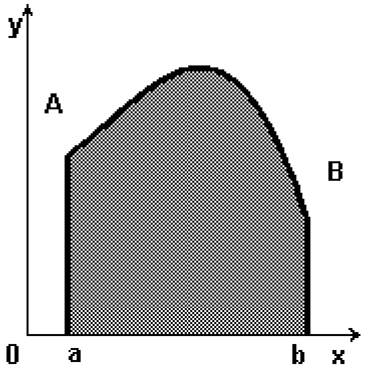
Pažymėkime $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ir pavadinkime skaičių $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$ šio skaidinio **skersmeniu**. Kiekvienoje atkarpoje $[x_{i-1}, x_i]$ pasirinkime po vieną tašką $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ir apskaičiuokime funkcijos reikšmes: $y_i = f(\xi_i)$. Sudarykime reiškinį

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kuris vadinamas Rymano[27] **integraline suma**.



7.1.1 pav.



7.1.2 pav.

Jei funkcija $y = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ yra teigiamoji, integralinė suma σ_n lygi pavaizduotos 7.1.1 paveiksle laiptuotosios figūros $aABb$ plotui. Kreivė $y = f(x)$ bei tiesių atkarpos $x = a$, $x = b$, $y = 0$ apriboja figūrą $aABb$ (žr. 7.1.2 pav.), kuri yra vadinama **kreivine trapecija**[28]. Kai atkarpos $[x_{i-1}, x_i]$ yra mažos (t. y.

[27] George Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) – vokiečių matematikas.
[28] Kai $y = f(x)$ yra tiesinė funkcija $y = kx + l$, ši figūra yra paprastoji trapecija.

$\lambda \to 0$ ir iš to išplaukia, kad[29] $n \to \infty$), laiptuotosios figūros (7.1.1 pav.) plotas arba integralinė suma σ_n apytiksliai lygi kreivinės trapecijos plotui S.

Jei egzistuoja baigtinė integralinės sumos σ_n riba, kai $\lambda \to 0$ ($\Rightarrow n \to \infty$), kuri nepriklauso nuo
1) atkarpos $[a, b]$ skaidinio $x_0, x_1, \dots, x_n$ bei
2) taškų $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ parinkimo, tai
ši riba yra vadinama funkcijos $f(x)$ **apibrėžtiniu integralu** atkarpoje $[a, b]$ ir žymima

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

- Sakome, kad funkcija $f(x)$ yra **integruojamoji** atkarpoje $[a, b]$.
- Skaičius a ir b vadiname *apatiniu* bei *viršutiniu* **integravimo rėžiais**.
- Funkcija $f(x)$ yra vadinama *pointegraline* funkcija,
- $f(x)dx$ – *pointegralinis reiškinys*,
- x – *integravimo kintamasis*.

Jei funkcija $f(x)$ yra tolydžioji[30] atkarpoje $[a, b]$, tai ji yra integruojama.

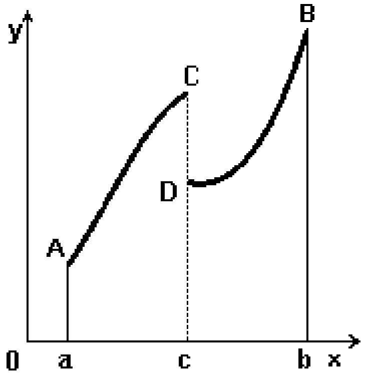
Pastaba

7.1.1. Funkcijos *tolydumas* yra *pakankama*, bet nėra *būtina* jos **integruojamumo** sąlyga. Pavaizduota 7.1.3 paveiksle funkcija turi taške $x = c$ pirmosios rūšies trūkį, tačiau ji yra **integruojamoji**, nes jos apibrėžtinis integralas atkarpoje $[a, b]$ lygus dviejų kreivinių trapecijų $aACc$ ir $cDBb$ plotų sumai.

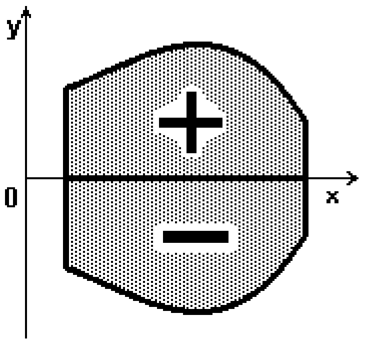
Pastaba

7.1.2. Kai funkcija $f(x)$ yra tolydžioji ir $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$ apibrėžtinis integralas yra lygus atitinkamos kreivinės trapecijos plotui (žr. 7.1.4 pav.), tačiau integralinė suma σ_n apibrėžta visoms (nebūtinai teigiamoms) funkcijoms $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Svarbu, kad egzistuotų baigtinė riba $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n$. Jei funkcija $f(x)$ yra tolydžioji ir $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$ apibrėžtinis integralas lygus pavaizduotos 7.1.4 paveiksle kreivinės trapecijos plotui, su minuso ženklu: $\int\limits_a^b f(x)\, dx = -S$.

[29] Pastebėkime, kad iš $n \to \infty$ neišplaukia, kad $\lambda \to 0$. Imkime, pavyzdždiui, $x_0 = a$, $x_1 = (b - a)/2$, $x_j = x_1 + hj$, $h = (a + b)/2n$ ir gausime $\lambda = (a + b)/2$.



7.1.3 pav.



7.1.4 pav.

Pastaba

7.1.3. Paminėkime apibrėžtinio integralo fizikinę prasmę, kai $y = v(t)$ yra materialiojo taško kintamasis judėjimo greitis. Tada nuo laiko momento t_1 iki momento t_2 materialusis taškas nueina kelią, kurio ilgis yra lygus apibrėžtiniam integralui $\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

7.1.1 pavyzdys. Apskaičiuokime $\int\limits_a^b dx$.

Sprendimas
Turime $f(x) \equiv 1$ ir

$$\begin{aligned}\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1 \cdot (x_1 - x_0) + 1 \cdot (x_2 - x_1) + \cdots + \\ +1 \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) + 1 \cdot (x_n - x_{n-1}) = \\ = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + \\ +x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} = \\ = x_n - x_0 = b - a.\end{aligned}$$

Taigi $\boxed{\int\limits_a^b dx = b - a}$

Atsakymas. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

7.1.2 pavyzdys. Apskaičiuokime $\int\limits_a^b x\, dx$.

<u>Sprendimas</u>
Sudarykime funkcijai $f(x) = x$ integralinę sumą σ_n, imdami taškus $x_i = a+ih,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ h = \dfrac{b-a}{n},\ \xi_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = h \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = h \sum_{i=1}^{n} \frac{a+(i-1)h+a+ih}{2} =$$
$$= h \sum_{i=1}^{n} \left(a+ih-\frac{h}{2}\right) = h \cdot n \left(a - \frac{h}{2}\right) + h^2 \cdot \frac{(n+1)n}{2} =$$
$$= (b-a) \cdot \left(a - \frac{b-a}{2n}\right) + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)n}{2n^2}.$$

Skaičiuojame ribą, kai $\lambda = h = \dfrac{b-a}{n} \to 0 \Rightarrow n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = (b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Atsakymas. $\dfrac{b^2-a^2}{2}$.

7.2. Apibrėžtinio integralo savybės

Tarkime, kad funkcijos $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ yra integruojamos atkarpoje $[a, b]$.
1°. Tiesiškumo savybė

$$\boxed{\int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\ dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\, dx},$$

kai $\forall\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Įrodymas. Taikydami integralo apibrėžimą ir remdamiesi ribų savybėmis, gauname

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\ dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 f_1(\xi_i) + \alpha_2 f_2(\xi_i))\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 f_1(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_2 f_2(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \alpha_1 \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \alpha_2 \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

2°. Sukeitus vietomis apibrėžtinio integralo integravimo rėžius, integralas pakeičia ženklą. Integralas $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ buvo apibrėžtas, kai $a < b$. Susitarkime, kad $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}:$

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx}$$

Iš čia išplaukia, kad $\boxed{\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0}$, t.y. linijos plotas lygus nuliui.

3°. Adityvumo savybė. Jeigu atkarpą $[a, b]$ tašku c padalinsime į dvi atkarpas $[a, c]$ ir $[c, b]$, tai $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}:$

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx}$$

kai visi trys integralai egzistuoja.

Įrodymas. Kai $a < c < b$, sudarome integralinę sumą σ_n taip, kad c būtų skaidinio elementas, t. y. dalijimo taškas:

$$\sigma_n = \sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i - f(x_c)\Delta x_c + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Perėję prie ribos, kai $\lambda \to 0$, gauname įrodomą savybę:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma_n = \int\limits_a^c f(x)\,dx - 0 + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Tarkime, kad $a < b < c$. Tada $\int\limits_a^c = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c = \int\limits_a^b - \int\limits_b^c$. Todėl $\int\limits_a^c + \int\limits_c^b = \int\limits_a^b$.

4°. Tarkime, kad $f(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a, b],\ a < b$. Tada

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Įrodymas. Kadangi $f(\xi_i) \geqslant 0,\ \forall \xi_i \in [a,b]$ ir $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, visi integralinės sumos $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ nariai yra neneigiamieji. Todėl $\sigma_n \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ir neneigiamosios skaičių sekos riba yra neneigiamoji: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_n \geqslant 0.$

5°. Tarkime, kad $f(x) \geqslant g(x),\ \forall x \in [a,b],\ a < b$. Tada

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Įrodymas. išplaukia iš **1**° ir **4**° apibrėžtinio integralo savybių:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx \geqslant 0.$$

6°. $\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx}$

Įrodymas. Sudarome integralinę sumą ir taikome gerai žinomą trikampio nelygybę $|A+B| \leqslant |A| + |B|$:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)\Delta x_i| =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\,\Delta x_i = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

7°. **Integralo įvertinimo savybė**. Tarkime, kad $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ ir $M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ tada:

$$\boxed{m\,(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)}$$

Įrodymas išplaukia iš **5°**, **1°** savybių ir 7.1.1 pavyzdžio.

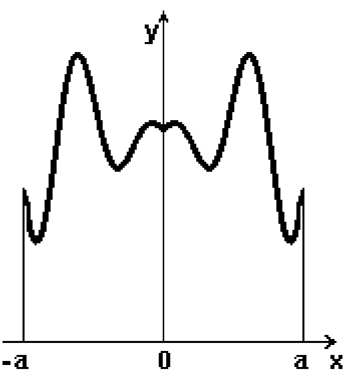
8°. **Vidurinės reikšmės teorema**. Jei funkcija $f(x)$ yra tolydžioji atkarpoje $[a,b]$, tai egzistuoja toks taškas $\eta \in [a,b]$, kad

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\eta)\,(b-a)}$$

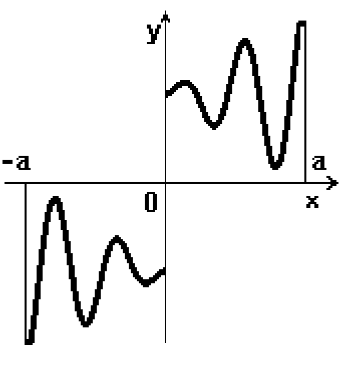
Įrodymas. Tolydžioji atkarpoje $[a,b]$ funkcija $f(x)$ įgyja šioje atkarpoje savo mažiausiąją $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ir didžiausiąją $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ reikšmes bei visas reikšmes Υ, kai $m \leqslant \Upsilon \leqslant M$. Pažymėkime $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Upsilon$. Tada pagal **7°** savybę $m \leqslant \Upsilon \leqslant M$ ir iš funkcijos $f(x)$ tolydumo išplaukia, kad egzistuoja toks taškas $\eta \in [a,b]$, kad $f(\eta) = \Upsilon$.

Pastaba

7.2.1. Remdamiesi adityvumo (**3°**) savybe bei geometriniais samprotavimais (žr. 7.2.5 pav.), gausime, kad *lyginės* funkcijos ($f(-x) = f(x)$) integralas intervale $[-a,a]$ turi savybę: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$.
Nelyginės funkcijos ($f(-x) = -f(x)$) integralas intervale $[-a,a]$ lygus nuliui: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ (žr. 7.2.6 pav.).
Pavyzdžiui, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = 0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx = 2\int\limits_0^{\pi} \cos(x)\,dx$.



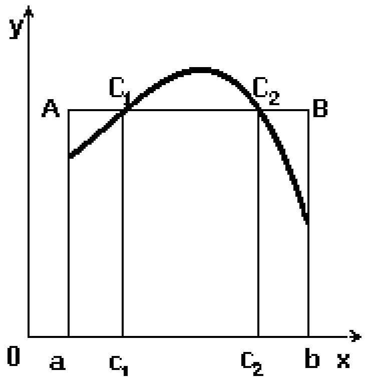
7.2.5 pav.



7.2.6 pav.

Pastaba

7.2.2. Kai funkcijos yra tolydžiosios, savybės (**4**°–**8**°) gali būti paaiškintos geometriškai. Pavyzdžiui, vidurinės reikšmės teoremą (**8**°) galima suformuluoti taip (žr. 7.2.7 pav.): egzistuoja toks stačiakampis $aABb$, kurio plotas lygus atitinkamos kreivinės trapecijos plotui, ir kraštinė AB susikerta su kreive $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (nebūtinai viename taške!). Susikirtimo taško abscisė lygi skaičiui η.



7.2.7 pav.

7.2.1 pavyzdys. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0 \end{cases}$ integralą $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

Sprendimas

Taikome **1**°, **3**° apibrėžtinio integralo savybes bei 7.1.1 pavyzdžio formulę:

$$\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx = 0 \cdot \int\limits_{-2}^{0} dx + 1 \cdot \int\limits_{0}^{2} dx$$
$$= 0 \cdot (0 - (-2)) + 1 \cdot (2 - 0) = 2.$$

Atsakymas. 2.

7.2.1 pavyzdys. Įvertinkime apibrėžtinį integralą $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{\sqrt{5 - 2\cos x}}$.

Sprendimas

Pažymėkime pointegralinę funkciją

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 2\cos x}}$, $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{(5 - 2\cos x)^3}}$.

Tada $m = \min\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x) = f(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\cdot(-1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$,
$M = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x) = f(0) = f(2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\cdot 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
ir taikome **7°** savybę:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5-2\cos x}} \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Atsakymas. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{7}} \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{\sqrt{5-2\cos x}} \leqslant \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

7.2.3 pavyzdys. Palyginkime integralus $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$ ir $\int\limits_0^1 e^{x^3}\,dx$.

Sprendimas

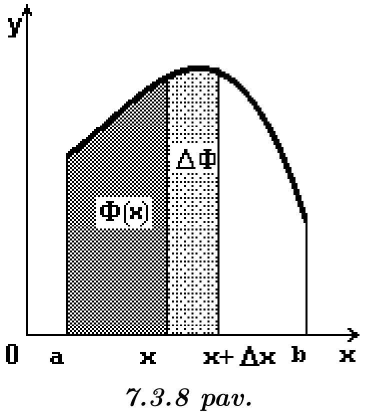
Kadangi $e^{x^2} \geqslant e^{x^3}$, $\forall\ x \in [0,1]$, taikome **5°** savybę: $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx \geqslant \int\limits_0^1 e^{x^3}\,dx$.

Atsakymas. $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx \geqslant \int\limits_0^1 e^{x^3}\,dx$.

7.3. Niutono ir Leibnico formulė

Tarkime, kad funkcija f yra integruojama atkarpoje $[a,b]$. Tada $\forall x \in [a,b]$ ji yra integruojama ir atkarpoje $[a,x]$. Geometriškai tai reiškia plotą kreivinės trapecijos, turinčios kintamą kraštinę ab. Tokios trapecijos plotas bus kintamas ir priklausys nuo x:

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)$$



7.3.8 pav.

Parodykime, kad funkcija $\Phi(x)$ yra diferencijuojama taške x, jei tame taške yra tolydžioji pointegralinė funkcija $f(x)$. Funkcijos $\Phi(x)$ pokytis yra

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x) &= \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)\\ &= \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Teorema. Jei funkcija $f(x)$ yra tolydžioji atkarpoje $[a,b]$, tai funkcija $\Phi(x)$ yra diferencijuojamoji $\forall x \in (a,b)$ ir

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Apibrėžtinio integralo išvestinė pagal viršutinį rėžį lygi pointegralinei funkcijai, kurioje vietoj integralinio kintamojo įrašyta viršutinio rėžio reikšmė (kai pointegralinė funkcija tolydi).
Įrodymas. Turime

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} \left(f(t)-f(x)\right)\,dt + \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt\\ &= \frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} \left(f(t)-f(x)\right)\,dt + f(x).\end{aligned}$$

Funkcija $f(x)$ yra tolydžioji. Todėl $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :$
$|t-x| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(x)| < \varepsilon$. Taigi kai $|\Delta x| < \delta$, turime

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} \left(f(t)-f(x)\right)\,dt\right| < \frac{1}{|\Delta x|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta x| = \varepsilon.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} (f(t) - f(x))\, dt + f(x) \right) =$$

$$= 0 + f(x) = f(x).$$

Įrodę teoremą gauname, kad integralas su kintamuoju viršutiniu rėžiu $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ yra pointegralinės funkcijos $f(x)$ *pirmykštė* funkcija.
Vadinasi, kiekviena tolydžioji funkcija turi pirmykštę funkciją.

Teorema. Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a;b]$ ir $F(x)$ – kuri nors jos pirmykštė funkcija šioje atkarpoje, tai

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Įrodymas. Tolydi atkarpoje $[a;b]$ funkcija $f(x)$ turi pirmykštę funkciją, lygią $\int\limits_a^x f(t)dt$.
Teoremos sąlygoje sakoma, kad ir $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, taigi jos turi skirtis tik konstanta

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

kai $x = a$, gauname

$$\int\limits_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

iš čia $0 = F(a) + C$ arba $C = -F(a)$.
Taigi $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Įrašę vietoj x reikšmę b gauname:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Ši formulė vadinama Niutono[31] ir Leibnico[32] formule.
Taip pat žymime

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.}$$

7.3.1 pavyzdys. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx$.

Sprendimas

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = \sin\pi - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0.$$

Atsakymas. 0.

7.3.2 pavyzdys. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{2+3x}$.

Sprendimas

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}$.

7.3.3 pavyzdys. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Sprendimas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Atsakymas. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

[31]Isaac Newton (1643–1727) – anglų fizikas ir matematikas.
[32]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – vokiečių filosofas, matematikas ir fizikas.

7.4. Integravimo metodai

Kintamojo keitimas

Teorema. Tarkime, kad integrale $\int\limits_a^b f(x)dx$ kintamasis x pakeistas pagal formulę $x = \varphi(t)$. Jeigu:
1. $f(x)$ tolydi $[a; b]$,
2. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
3. $\varphi(t)$ ir $\varphi'(t)$ tolydžios atkarpoje $[\alpha; \beta]$,
4. $f(\varphi(t))$ apibrėžta ir tolydi atkarpoje $[\alpha; \beta]$, tai

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Įrodymas. Sudėtinės funkcijos $F(\varphi(t))$ išvestinė yra $F(\varphi(t))' = F'(x)x'(t)$, arba $d\,F(\varphi(t)) = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F'(x)dx = f(x)dx$. Įrašę šiuos reiškinius į Niutono ir Leibnico formulę, gauname

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b dF(x) = F(b) - F(a) =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta dF(\varphi(t)) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Taigi galima pakeisti integravimo kintamąjį $x = \varphi(t)$:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}$$

7.4.1 pavyzdys. Integruokime tą patį integralą, keisdami kintamąjį $x = \cos t$.

Sprendimas
Tada $dx = -\sin t\,dt$, $0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$, $1 = \cos 0$. T. y. apatinis integravimo rėžis yra $\dfrac{\pi}{2}$,

o viršutinis – 0 (ne atvirkščiai!). Taigi integralą pertvarkome taip:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t\,dt)$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Atsakymas. $\frac{\pi}{4}$.

7.4.2 pavyzdys. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Sprendimas

Pakeiskime $x = \sin t,\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}:\ dx = \cos t\,dt$. Tada

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Atsakymas. $\frac{\pi}{4}$.

7.4.3 pavyzdys. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

Sprendimas

Perrašykime šį integralą, pritaikę trigonometrinę formulę
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Tada

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d\,\sin x.$$

Pakeiskime $t = \sin x$. Tada $\alpha = \sin 0 = 0$, $\beta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Taigi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = 2\int_0^1 t\,dt = 1.$$

Atsakymas. 1.

Šį integralą galime integruoti ir be tiesioginio kintamojo keitimo: $2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, d\sin x = 2\cdot \left.\dfrac{\sin^2 x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$.

7.4.4 pavyzdys. $\int\limits_5^{13} \dfrac{xdx}{\sqrt{x-4}}$.

Sprendimas

$$\int\limits_5^{13} \frac{xdx}{\sqrt{x-4}} = \begin{bmatrix} x-4=t^2 & x=13, t=3 \\ dx=2tdt & x=5, t=1 \end{bmatrix} = \int\limits_1^3 \frac{(t^2+4)2tdt}{t} = 2\int\limits_1^3 (t^2+4)dt$$

$$= 2\int\limits_1^3 t^2 dt + 8\int dt = 2\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^3 + 8t|_1^3 = 2\left(9-\frac{1}{3}\right) + 8\,(3-1) = \frac{100}{3}.$$

Atsakymas. $\dfrac{100}{3}$.

Integravimas dalimis

Tarkime, kad $u\,(x)$ ir $v\,(x)$ – diferencijuojamos atkarpoje $[a;b]$ funkcijos. Tada $(uv)' = u'v + uv'$. Suintegravę abi šios lygybes puses, gauname $\int\limits_a^b (uv)'\,dx = \int\limits_a^b u'vdx + \int\limits_a^b uv'dx = \int\limits_a^b vdu + \int\limits_a^b udv$.

Pastebėję, kad

$$\int\limits_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int\limits_a^b d\,(u(x)v(x)) = \left.u(x)v(x)\right|_a^b,$$

gauname integravimo dalimis formulę

$$\boxed{\int\limits_a^b u\,dv + \int\limits_a^b v\,du = \left.uv\right|_a^b}$$

arba

$$\boxed{\int\limits_a^b u\,dv = \left.uv\right|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.}$$

7.4.5 pavyzdys. $\int\limits_1^e x \ln x \, dx$

<u>Sprendimas</u>

$$\int\limits_1^e x \ln x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{e^2}{2} \cdot \ln e - \frac{1^2}{2} \cdot \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Atsakymas. $\dfrac{e^2+1}{4}$.

2.20 testas

1 Pažymėkime $f(x) = (x-1)\cos x$.
Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją.

① $\cos x + x \sin x - 3 \sin x$; ② $\cos x - x \cos x + \sin x$;
③ $2 \cos x - x \cos x + \sin x$; ④ $\cos x + x \sin x + \sin x$;
⑤ $\cos x + x \sin x - \sin x$; ⑥ $-\cos x - x \cos x + \sin x$.

2 Apskaičiuokite $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$.

① 1; ② $\frac{\pi-4}{2}$; ③ $\frac{\pi}{2}$; ④ 0; ⑤ $\frac{\pi+4}{2}$; ⑥ $\frac{\pi+2}{2}$.

8. Netiesioginiai integralai

Raktiniai žodžai: Netiesioginiai integralai. Konvergavimo požymiai. Trūkiųjų funkcijų integravimas.

Literatūra: [Apy01] 83–86 p.; [Kry03] 97–109 p.; [Pek05] 273–286 p.; [Rum76] XX skyrius, 373–375 p.;

8.1. Begalinių rėžių atvejis

INTEGRALAI $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ **ir** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Apibendrinkime apibrėžtinio integralo $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ sąvoką, kai atkarpa $[a, b]$ nėra baigtinė. Tarkime, kad funkcija $f(x)$ apibrėžta begaliniame intervale $x \in [a, +\infty)$ ir integruojama kiekvienoje atkarpoje $[a, b] \subset [a, +\infty)$ $(\forall b > a)$.

8.1.1 apibrėžimas. Jeigu egzistuoja integralo $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ baigtinė riba, kai $b \to +\infty$, tai ji vadinama funkcijos $f(x)$ **netiesioginiu integralu** intervale $[a, +\infty)$ ir žymima

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

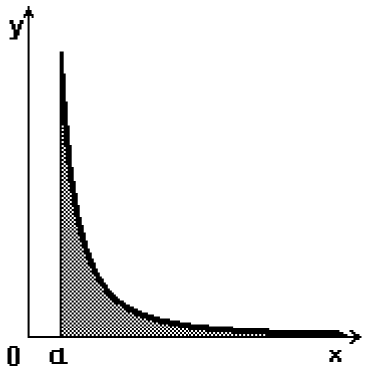
Sakoma, kad netiesioginis integralas **konverguoja**. Kai ši riba neegzistuoja arba yra begalinė, sakoma, kad netiesioginis integralas **diverguoja**.

8.1.1 pavyzdys. Apskaičiuokite $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$.

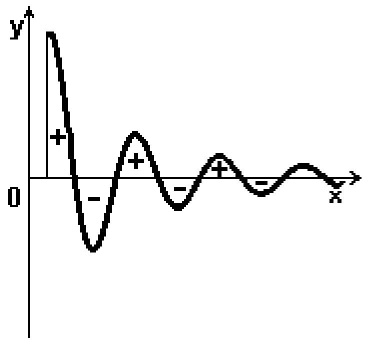
Sprendimas

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b \right) = -\frac{1}{\lim\limits_{b\to+\infty} b} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 0 + 1 = 1.$$

Atsakymas. 1.



8.1.1 pav.



8.1.2 pav.

Kai $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, +\infty)$ tiesės $y = 0$, $x = a$ ir kreivė $y = f(x)$ apriboja *begalinę* kreivinę trapeciją (žr. 8.1.1 pav.). Jei netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguoja, jis yra lygus šios kreivinės trapecijos plotui. Pastebėkime, kad netiesioginis integralas turi geometrinę prasmę ir tuo atveju, kai funkcija $f(x)$ nėra pastovaus ženklo (žr. 8.1.2 pav.).

8.1.2 apibrėžimas. Netiesioginiu integralu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ vadinama riba $\lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Kai ši riba egzistuoja ir yra baigtinė, sakoma kad netiesioginis integralas *konverguoja*, priešingu atveju – *diverguoja*.

8.1.3 apibrėžimas. Sakoma, kad netiesioginis integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguoja*, kai su bet kuriais realiais skaičiais c ir d konverguoja abu integralai $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ ir $\int\limits_{d}^{+\infty} f(x)\,dx$. Kai bent vienas iš šių integralų diverguoja, sakoma, kad integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ irgi *diverguoja*.

Teorema. Jei netiesioginis integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguoja, tai jis nepriklauso nuo skaičių c ir d.

Įrodymas. Remdamiesi netiesioginių integralų apibrėžimais 8.1 ir 8.2, turime

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_d^b f(x)\,dx.$$

Tarkime, kad $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija: $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$. Tada, taikydami Niutono ir Leibnico formulę, gauname

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^d + \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_d^b = \\ = F(c) - \lim_{a\to-\infty} F(a) &+ F(b) - F(c) + \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(d) = \\ &= \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).\end{aligned}$$

Pažymėję $\lim\limits_{r\to\pm\infty} F(r) = F(\pm\infty)$, galime apibendrinti Niutono ir Leibnico formulę netiesioginiam integralui[33]:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).}$$

8.1.2 pavyzdys. Apskaičiuokite $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Sprendimas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^0 + \lim_{b\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Atsakymas. Integralas konverguoja.

8.1.3 pavyzdys. Apskaičiuokite $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{2x\,dx}{1+x^2}$.

Sprendimas

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx^2}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \ln(1+x^2)\Big|_0^b = +\infty.$$

Atsakymas. Integralas diverguoja.

[33] Taip rašome, kai abi ribos $F(+\infty)$ ir $F(-\infty)$ egzistuoja ir yra baigtinės. Priešingu atveju sakome, kad integralas diverguoja.

8.2. Konvergavimo požymiai

Be įrodymo pateiksime teiginį, kuris yra labai reikšmingas matematinei analizei, tačiau jo sąlygos dažnai yra sunkiai patikrinamos.

Teorema. (Koši[34] kriterijus). Netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguoja tada ir tik tada, kai

$$\forall \varepsilon\ \exists b > a:\ \forall\, b',\ b'' > b\ \Rightarrow \left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Pastaba

8.2.1. Teoremos prasmę galima paaiškinti labai paprastai. Integralo konvergavimo būtina ir pakankama sąlyga: jo „uodega“ nyksta. Iš čia išplaukia, kad jei netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguoja, tai *tolydžioji* funkcija $f(x)$ nyksta: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Tačiau ši sąlyga yra *būtina*, bet nėra *pakankama*. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tolydžioji, kai $x \in [1, +\infty)$ ir nyksta: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Tačiau integralas $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x} = \ln(+\infty) = +\infty$, t. y. diverguoja.

Teorema. (palyginimo požymis). Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos intervale $[a, +\infty)$ bei $\forall\, b > a$ yra integruojamos atkarpoje $[a, b]$. Jei

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, +\infty)$$

ir netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konverguoja, tai *konverguoja* ir netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Įrodymas. Iš teoremos sąlygos $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ir apibrėžtinio integralo savybių išplaukia, kad

$$\left|\int\limits_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{B'}^{B''} g(x)\,dx\right|\ \ \forall\, B',\ B'' \in [a, +\infty).$$

[34] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – prancūzų matematikas.

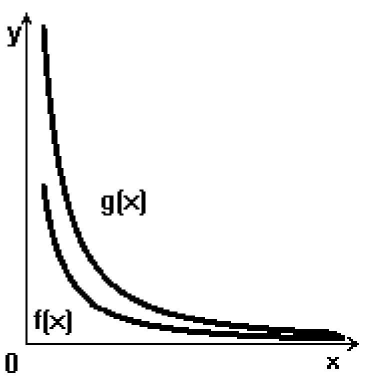
Integralas $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konverguoja. Todėl pagal Koši kriterijų $\forall\ \varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $b > a$, kad $\forall\ B',\ B'' > b$:

$$\left|\int\limits_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{B'}^{B''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

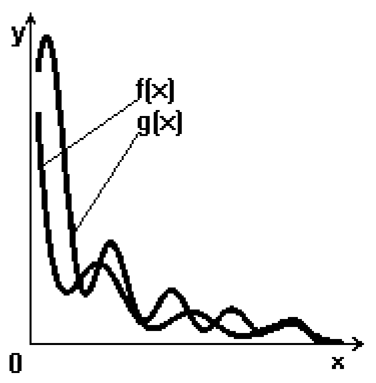
o tai ir reiškia, kad integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguoja.

Pastaba

8.2.2. Palyginimo požymį galima paaiškinti taip. Jei „didesnės“ funkcijos integralas konverguoja, tai ir „mažesnės“ funkcijos integralas konverguoja (žr. 8.2.1 pav.). Iš čia darome išvadą, kad jei integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverguoja, tai *diverguoja* ir integralas $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Pastebėkime dar, kad iš Koši kriterijaus išplaukia, jog konvergavimas priklauso tik nuo funkcijos „elgesio begalybėje“. Todėl palyginimo požymį galima taikyti ir tuo atveju, kai nelygybė $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ yra teisinga ne visame intervale $[a, +\infty)$, o tik kai $x \geqslant x_0 > a$ (žr. 8.2.2 pav.).



8.2.1 pav.



8.2.2 pav.

Tiriant netiesioginių integralų konvergavimą, jie dažnai lyginami su laipsninės funkcijos $x^{-\alpha}$ integralu, kurį dabar išnagrinėsime.

8.2.1 pavyzdys. Išnagrinėkite integralą $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\nu}}$, $a > 0$.

Sprendimas

Kai $\nu = 1$, pointegralinės funkcijos pirmykštė yra $\ln x$ ir integralas diverguoja (žr.

8.2.1 pastabą).

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\nu}=\left.\frac{x^{1-\nu}}{1-\nu}\right|_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & \text{jei } \nu\leqslant 1\\ \dfrac{1}{(\nu-1)\,a^{\nu-1}}, & \text{jei } \nu>1.\end{cases}$$

Taigi integralas

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\nu}\ \text{—}\ \begin{cases}\text{diverguoja, kai } \nu\leqslant 1\\ \text{konverguoja, kai } \nu>1.\end{cases}}$$

8.2.2 pavyzdys. Ištirkime integralo $\int\limits_e^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ konvergavimą.

Sprendimas

Kai $x\geqslant e$, turime $\ln x\geqslant 1$ ir todėl $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\geqslant\frac{1}{x^{\frac13}}\geqslant 0$. Integralas $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac13}}$ diverguoja ($\nu=\frac13\leqslant 1$). Todėl pagal palyginimo požymį integralas $\int\limits_e^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ irgi diverguoja.

Atsakymas. Integralas diverguoja.

8.2.3 pavyzdys. Įrodykite integralo $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2+\cos x^2}{1+x^2}\,dx$ konvergavimą.

Sprendimas

Įvertiname $1\leqslant 2+\cos x^2\leqslant 3\ \forall x\in\mathbb{R}$ ir gaunane $\frac{2+\cos x^2}{1+x^2}\leqslant\frac{3}{1+x^2}$. Integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\,dx}{1+x^2}=3\pi$. Todėl integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2+\cos x^2}{1+x^2}\,dx$ konverguoja. **Įrodyta**.

Teorema (ribinis palyginimo požymis). Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos, kai $x\geqslant a$ bei yra *teigiamosios*: $f(x)>0$, $g(x)>0$ $\forall x\in[a,+\infty)$. Jei egzistuoja baigtinė riba $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda>0$, tai netiesioginiai integralai $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ ir $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$ arba abu konverguoja, arba abu diverguoja.

Įrodymas. Ribos λ egzistavimas reiškia, kad $\forall\varepsilon>0$ egzistuoja toks skaičius $x_0>a$, kad

$$\forall x\geqslant x_0\Rightarrow\ \lambda-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\lambda+\varepsilon.$$

Funkcija $g(x)$ yra teigiamoji. Todėl lygybes galime perrašyti taip:

$$(\lambda-\varepsilon)\,g(x)<f(x)<(\lambda+\varepsilon)\,g(x).$$

Tarkime, kad integralas $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ konverguoja. Tada konverguoja ir integralas $\int\limits_a^{+\infty} (\lambda+\varepsilon)\,g(x)\,dx$ ir, taikydami palyginimo požymį, gauname integralo $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergavimą. Kitus atvejus įrodome panašiais samprotavimais.

8.2.4 pavyzdys. Ištirkime integralo $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+x+5}$ konvergavimą.

<u>Sprendimas</u>

Funkcija $\dfrac{1}{x^2+x+5}$, kai $x \to \pm\infty$, nyksta tokiu pat greičiu, kaip funkcija $\dfrac{1}{x^2}$:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2+x+5}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+x+5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}} = 1.$ Integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ konverguoja ($\nu = 2 > 1$), todėl konverguoja ir integralas $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+x+5}$.

Atsakymas. Integralas konverguoja.

Jei konverguoja netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, tai sakome, kad integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguoja* ***absoliučiai***.

Teorema. Jei netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konverguoja *absoliučiai*, tai jis konverguoja.

Įrodymas išplaukia iš nelygybės $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx$ ir Koši kriterijaus.

Sakome, kad netiesioginis integralas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *konverguoja* ***reliatyviai***, kai jis konverguoja, tačiau integralas $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverguoja.

8.3. Trūkiųjų funkcijų atvejis

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydžioji intervale $[a, b)$ ir $x = b$ yra jos antrosios rūšies trūkio taškas, t. y. neegzistuoja baigtinė riba $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Trūkiosios taške $x = b$ funkcijos $f(x)$ **netiesioginiu integralu** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ vadinama riba $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Kai ši riba egzistuoja ir yra baigtinė, sakoma, kad netiesioginis integralas **konverguoja**. Kai riba neegzistuoja arba yra begalinė, sakoma, kad integralas **diverguoja**.

Trūkosios taške $x = a$ funkcijos $f(x)$ netiesioginis integralas apibrėžiamas analogiškai:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Tarkime, kad vidinis atkarpos taškas $c \in (a, b)$ yra funkcijos $f(x)$ antrosios rūšies trūkis. Tada netiesioginį integralą $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ apibrėžiame taip:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$

8.3.1 pavyzdys. Apskaičiuokite $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^2}$.

Sprendimas

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon_1\to+0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}\\ &= -\lim_{\varepsilon_1\to+0} \left(\frac{1}{(-\varepsilon_1)} - \frac{1}{-1}\right) - \lim_{\varepsilon_2\to+0} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.\end{aligned}$$

Taigi integralas diverguoja. Pastebėkime, kad, takydami Niutono ir Leibnico formulę, gausime $\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^1 = -2$. Akivaizdu, kad tai prieštarauja apibrėžtinio integralo savybei: neneigiamosios funkcijos integralas yra neneigiamasis.

Atsakymas. Integralas diverguoja.

8.3.2 pavyzdys. Apskaičiuokite $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^\nu}$.

Sprendimas

Kai $\nu = 1$, turime $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = +\infty$ ir integralas diverguoja. Kai $\nu \neq 0$, gauname

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 x^{-\nu}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right)\Bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{-\nu+1}\begin{cases}1-\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}, & \text{kai } \nu<1\\ 1-\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{\nu-1}, & \text{kai } \nu>1.\end{cases}$$

Taigi

$$\boxed{\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\nu} \;—\; \begin{cases}\text{diverguoja, kai } \nu \geqslant 1\\ \text{konverguoja, kai } \nu < 1\end{cases}}$$

Trūkiųjų funkcijų netiesioginių integralų konvergavimą galima tirti taip, kaip ir integralų su begaliniais rėžiais. Taigi be įrodymo pateiksime konvergavimo požymius.

Teorema. Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra tolydžiosios, kai $x \in [a, b)$, o taškas $x = b$ yra jų antrosios rūšies trūkis. Jei $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a, b)$, ir integralas $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ konverguoja, tai *konverguoja* ir integralas $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Jei integralas $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ diverguoja, tai integralas $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ irgi *diverguoja.*

Teorema. Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ funkcijos yra tolydžiosios ir teigiamosios, kai $x \in [a, b)$ ir egzistuoja baigtinė riba $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, tai integralai $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ir $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ arba abu konverguoja, arba abu diverguoja.

Sakome, kad netiesioginis integralas $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *konverguoja* ***absoliučiai***, kai konverguoja integralas $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Jei pirmasis integralas konverguoja, o antrasis – diverguoja, sakome, kad integralas $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *konverguoja* ***reliatyviai***.

Taigi kaip ir anksčiau iš absoliutaus netiesioginio integralo konvergavimo išplaukia jo konvergavimas, tačiau ne atvirkščiai.

8.3.3 pavyzdys. Ištirkime integralo $\int\limits_0^5 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergavimą.

Sprendimas

Turime $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ ir žinome, kad integralas $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int\limits_0^5 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ konverguoja ($\nu = \frac{1}{2} < 1$). Taigi integralas $\int\limits_0^5 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguoja absoliučiai ir todėl konverguoja.

Atsakymas. Integralas konverguoja.

8.3.4 pavyzdys. Įrodykite, kad integralas $\int\limits_0^1 \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}\,dx$ diverguoja.

Sprendimas

Įvertiname $\frac{2+\sin x}{(x-1)^2} \geqslant \frac{1}{(x-1)^2} > 0$ ir gauname integralo divergavimą, nes diverguoja integralas $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ ($\nu = 2 \geqslant 1$). **Įrodyta.**

9. Apytikslis integralų skaičiavimas

Raktiniai žodžai: Trapecijų formulė. Parabolių arba Simpsono formulė.
Literatūra: [Būd08] 270–283 p.; [Kry03] 110–113 p.; [Pek00] 237–246 p.; [Rum76] XX skyrius, 369–373 p.

9.1. Trapecijų formulė

Žinome, kad kreivinės trapecijos, apribotos kreive $y = f(x)$, x ašimi ir tiesėmis $x = a$ bei $x = b$, plotas lygus integralui

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Norint šį integralą apskaičiuoti apytiksliai, reikia intervalą $[a, b]$ padalyti į n **lygių** dalių. Dalijimo taškus (eidami x ašies kryptimi) žymėsime taip:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Apskaičiuojame funkcijos $y = f(x)$ reikšmes dalijimo taškuose:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \cdots, y_i = f(x_i), \cdots, y_n = f(x_n).$$

Tarkime, kad atkarpa $[a, b]$ yra skaidoma į vienodo pločio h intervalus: $x_i - x_{i-1} = \Delta x = h$, ir sudarykime dvi integralines sumas

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = h\left(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right),$$

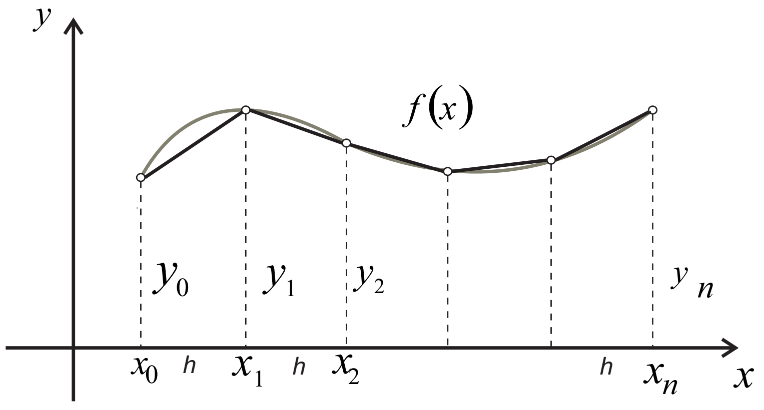
$$\sigma_d = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = h\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\right).$$

Taigi gauname dvi apytiksles formules apibrėžtiniam integralui skaičiuoti:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sigma_k \approx \sigma_d.$$

Šios formulės yra vadinamos *kairiųjų ir dešiniųjų stačiakampių formulėmis.* Sudarykime dar vieną apytikslę formulę:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\sigma_k + \sigma_d}{2}.$$



9.1.1 pav.

Gautos formulės geometrinė prasmė yra stačiakampių pakeitimas tiesinėmis trapecijomis, kurių:

- pagrindai yra y_{i-1} ir y_i,
- aukštinė h lygi dalinio intervalo ilgiui $\dfrac{b-a}{n}$.

Sudėję tų trapecijų plotus, gausime sumą, kuri mažai skirsis nuo kreivinės trapecijos ploto:

$$\int\limits_a^b f\,(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h.$$

arba

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right).$$

Gavome **trapecijų apytikslę formulę** apibrėžtiniam integralui skaičiuoti.

Pagrindinė mintis – integravimą pakeisti sumavimu kaip integralo apibrėžime.

9.1.1. pavyzdys. Apskaičiuokime apytiksliai integralą $\int\limits_0^1 e^{x^3}\,dx$.

<u>Sprendimas</u>

Sprendimas pateiktas taikant matematinius paketus:

```
> restart:f(x):=exp(x^3);
```

$$\mathrm{f}(x) := e^{(x^3)}$$

```
> with(student):rightsum(f(x),x=0..1,10);
```

$$\frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10} e^{(1/1000\,i^3)}\right)$$

```
> evalf(%);
```

$$1.434582588$$

```
> evalf(rightsum(f(x),x=0..1,100));
```

$$1.350563781$$

```
> evalf(rightsum(f(x),x=0..1,1000));
```

$$1.342764238$$

Matome, kad dešiniųjų stačiakampių formulė teikia ne didesnį kaip $0,01$ tikslumą, nors atkarpa $[0,1]$ buvo suskaidyta net į 1 000 dalių. Kiek geresnį rezultatą gausime, taikydami kairiųjų stačiakampių ir trapecijų formulę.

9.1.2. pavyzdys.

Sprendimas

```
> restart:f(x):=exp(x^3);
```

$$\mathrm{f}(x) := e^{(x^3)}$$

```
> with(student):
> evalf(trapezoid(f(x),x=0..1,100));
```

$$1.341972372$$

```
> evalf(rightsum(f(x),x=0..1,100));
```

$$1.350563781$$

```
> evalf(rightsum(f(x),x=0..1,1000));
> evalf(trapezoid(f(x),x=0..1,1000));
```

$$1.342764238$$
$$1.341905098$$

9.2. Parabolių formulė

Parabolių, arba Simpsono[35], formulė gauta 1742 m., n kreivinių trapecijų plotus pakeitus parabolinių trapecijų plotais. Intervalą $[a,b]$ padalykime taškais į $2n$ lygių dalių

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

Atitinkamas funkcijos reikšmes pažymėkime

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.$$

[35] Thomas Simpson (1710–1761) – anglų matematikas.

Imame dvigubą dalinį intervalą $[x_0, x_2]$, kurio ilgis

$$h = x_2 - x_0 = \frac{b-a}{n}.$$

Tada pirmosios parabolinės trapecijos, kai parabolė $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ nubrėžta per taškus (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ploto S_1 išraiška yra tokia:

$$S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Analogiškai gauname antrosios parabolinės trapecijos, kai parabolė $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ nubrėžta per taškus (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), ploto S_2 išraišką:

$$S_1 = \int\limits_{x_2}^{x_4} \left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right).$$

n-tosios parabolinės trapecijos išraiška:

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} \left(a_nx^2 + b_nx + c_n\right)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right).$$

Tada

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + \ldots + S_n.$$

Parabolių, arba **Simpsono formulė**

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx$$

$$\frac{h}{6}\left[\left(y_0 + y_{2n}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right)\right]$$

9.2.3. Pavyzdys. Dar kartą apytiksliai apskaičiuokime integralą $\int\limits_0^1 e^{x^3}\,dx$, taikydami Simpsono formulę.

<u>Sprendimas</u>

```
> with(student):f(x):=exp(x^3):
> evalf(simpson(f(x),x=0..1,10));
```

$$1.342025136$$

```
> evalf(simpson(f(x),x=0..1,100));
```

$$1.341904430$$

```
> evalf(simpson(f(x),x=0..1,1000));
```

$$1.341904418$$

Taigi jau gauname tikslumą $0,001$, kai $n = 10$. Pastebėkime, kad programa ***Maple*** apytiksliai apskaičiuoja integralus ir be jokių nurodymų.

9.2.4. pavyzdys.

Sprendimas

```
> restart:f(x):=exp(x^3);
```

$$\mathrm{f}(x) := e^{(x^3)}$$

```
> Int(f(x),x=0..1)=int(f(x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 e^{(x^3)}\,dx = \int_0^1 e^{(x^3)}\,dx$$

```
> evalf(%);
```

$$1.341904418 = 1.341904418$$

Paminėkime dar kelias programos ***Maple*** funkcijas:
leftbox, **middlebox**, **rightbox**, **middlesum**.

Imant tą patį dalijimo taškų skaičių, Simpsono formulė teikia tikslesnį rezultatą negu trapecijų formulė. Rezultatai bus tuo tikslesni, kuo didesnis bus dalijimų taškų skaičius.

10. Apibrėžtinio integralo taikymai

Raktiniai žodžai: Figūros plotas. Stačiakampės koordinatės. Kreivės ilgis. Trūkiųjų funkcijų integravimas. Gamybos apimtis. Džinio koeficientas

Literatūra: [Apy01] 81–83 p; [Būd08] 270–302 p; [Kry03] 80–96 p.; [Pek00] 246–266 p.; [Pek05] 262–273 p.; [Rum76] XXI skyrius, 378–393 p.; [Urb05] 678–692 p.

10.1. Figūros plotas

Kreivinės trapecijos (žr. 10.1.1 pav.), apribotos funkcijos $f(x) \geq 0$ grafiko, Ox ašies ir tiesių $x = a$ bei $x = b$, plotas S_f yra lygus apibrėžtiniam integralui

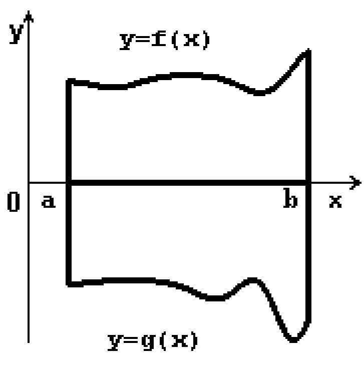
$$S_f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Kai $g(x) \leqslant 0$, $\forall x \in [a, b]$ esančios apatinėje pusplokštumėje kreivinės trapecijos (10.1.1 pav.) plotas lygus apibėžtiniam integralui, su minuso ženklu

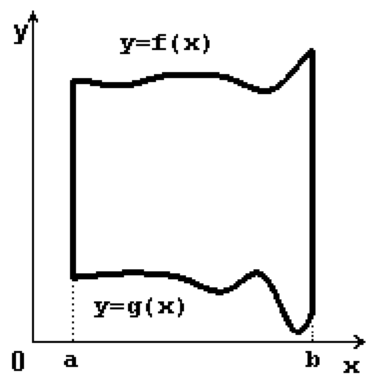
$$S_g = -\int_a^b g(x)\,dx.$$

Figūros, apribotos dviem kreivėmis $y = f(x)$, $y = g(x)$ bei dviem tiesių atkarpomis $x = a$, $x = b$, plotas S yra lygus dviejų kreivinių trapecijų plotų sumai:

$$S = S_f + S_g = \int_a^b f(x)\,dx + \left(-\int_a^b g(x)\,dx\right) = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx.$$



10.1.1 pav.



10.1.2 pav.

Pastebėkime, kad figūros plotas nepriklauso nuo koordinačių sistemos. Todėl galime pastumti figūrą išilgai ordinačių (Oy) ašies (žr. 10.1.2 pav.) ir nebereikalauti, kad būtų $f(x) \geqslant 0$ ir $g(x) \leqslant 0$. Taigi įrodėme, kad figūros, apribotos kreivėmis $y = g(x)$, $y = f(x)$, $g(x) \leqslant f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ ir tiesių atkarpomis $x = a$, $y = b$, plotas S apskaičiuojamas pagal formulę

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx}$$

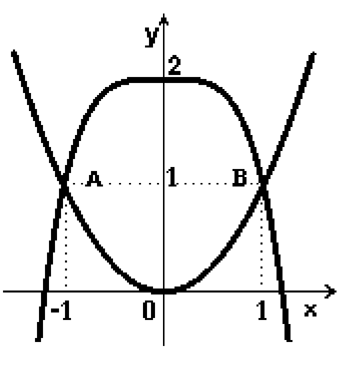
10.1.1 pavyzdys. Apskaičiuokime figūros, apribotos kreivėmis $y = x^2$ ir $y = 2 - x^4$, plotą.

Sprendimas

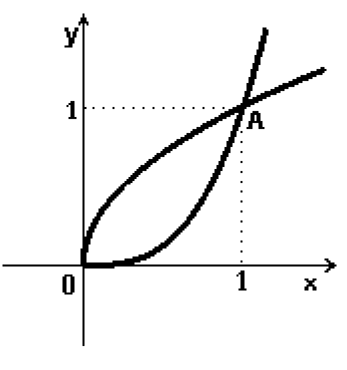
Kreivių susikirtimo taškai (žr. 10.1.3 pav.) yra $A(-1, 1)$ ir $B(1, 1)$. Taigi taikome formulę

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \left(2 - x^4 - x^2\right) dx = \left(2x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= \left(2(1 - (-1)) - \frac{1}{5}\left(1^5 - (-1)^5\right) - \frac{1}{3}\left(1^3 - (-1)^3\right)\right) \\ &= \left(4 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{44}{15}. \end{aligned}$$

Atsakymas. $\dfrac{44}{15}$.



10.1.3 pav.



10.1.4 pav.

10.1.2 pavyzdys. Apskaičiuokime figūros, apribotos kreivėmis $y = x^3$ ir $y^2 = x$, plotą.

<u>Sprendimas</u>
Randame kreivių susikirtimo tašką $A(1,1)$ (žr. 10.1.4 pav.) ir išreiškiame didesnę funkciją ($y = f(x)$): $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$. Taikome formulę:

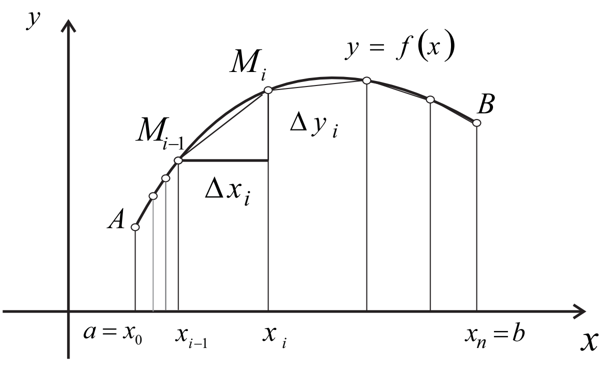
$$S = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Atsakymas. $\frac{5}{12}$.

10.2. Kreivės ilgis

Duota kreivė, kurios lygtis $y = f(x)$. Rasime jos lanko AB ilgį. Lanką AB taškais $A = M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$ padalykime į n dalių. Sakykime, kad šių taškų abscisės yra

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$



10.2.1 pav.

Išveskime stygas $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{i-1}M_i, \ldots, M_{n-1}B$. Pažymėkime stygos $M_{i-1}M_i$ ilgį – Δs_i. Tuomet laužtės, įbrėžtos į lanką AB, ilgis bus lygus

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i.$$

Pažymėkime

$$\max \Delta s_i = \lambda.$$

Teorema. Kreivės lanko AB ilgiu L vadinama riba, prie kurios artėja įbrėžtos į tą kreivę laužtės ilgis, kai $\lambda \to 0$. Taigi

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i.$$

Tarkime, kad funkcija $f(x)$ ir jos išvestinė $f'(x)$ atkarpoje $[a;b]$ tolydžios. Pažymėkime: $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Tuomet pagal Pitagoro teoremą

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Skirtumui $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ pritaikome Lagranžo[36] teoremą[37]. Tuomet

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i; \quad c_i \in [x_{i-1}; x_i].$$

Todėl

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f'(c_i)\Delta x_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

ir

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i.$$

Vadinasi,

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i.$$

Kadangi $f'(x)$ tolydi atkarpoje $[a,b]$, tai $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ irgi tolydi, todėl egzistuoja parašytos integralinės sumos riba, kuri lygi apibrėžtiniam integralui:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_a^b ds,$$

čia $ds = \sqrt{1 + y'^2}$. Dydis ds vadinamas *kreivės lanko ilgio diferencialu*. Kreivės $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ lanko ilgis lygus

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + {y'_x}^2} dx.$$

[36] Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – prancūzų matematikas ir mechanikas.

[37] Jei funkcija $y = f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a;b]$ ir diferencijuojama intervale $(a;b)$, tai tarp a ir b yra taškas c, kuriame $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

10.2.1 pavyzdys. Apskaičiuokime apskritimo $x^2 + y^2 = R^2$ ilgį L.

<u>Sprendimas</u>
Viršutinio pusapskritimio ($x \geqslant 0$) lygtis yra $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$. Taigi $y'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, $(y'(x))^2 = \dfrac{x^2}{R^2 - x^2}$ ir turime

$$\frac{L}{2} = \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = \left(\begin{array}{l} x = R \sin t \\ x = -R \ \Rightarrow\ t = -\dfrac{\pi}{2} \\ x = R \ \Rightarrow\ t = \dfrac{\pi}{2} \\ dx = R \cos t\, dt \end{array} \right)$$

$$= R \int_{-R}^{R} \frac{R \cos t\, dt}{\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}} = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos t\, dt}{R \cos t} = \pi R.$$

Taigi $\dfrac{L}{2} = \pi R$ ir gauname gerai žinomą formulę apskritimo ilgiui skaičiuoti: $L = 2\pi R$.

Atsakymas. $L = 2\pi R$.

10.2.2 pavyzdys. Apskaičiuokime elipsės $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ ilgį.

<u>Sprendimas</u>
Raskime elipsės lanko, esančio pirmame ketvirtyje ($x \geq 0$, $y \geq 0$), ilgį $\dfrac{L}{4}$. Turime $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$. Raskime funkcijos $y(x)$ išvestinę ir jos kvadratą: $y' = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$, $(y')^2 = \dfrac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$. Taikome formulę ilgiui skaičiuoti:

$$\frac{L}{4} = \int_{0}^{a} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx = \int_{0}^{a} \sqrt{\frac{a^2 \cdot a^2 + (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Pažymėkime elipsės ekscentricitetą $e = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$. Tada
$\dfrac{L}{4} = a \int_0^a \sqrt{\dfrac{1 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$. Pakeiskime integravimo kintamąjį:
$x = a \sin t$, $x = 0 \ \Rightarrow\ t = 0$, $x = a \ \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$, $dx = a \cos t$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$.

Taigi $L = 4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}\, dt$.

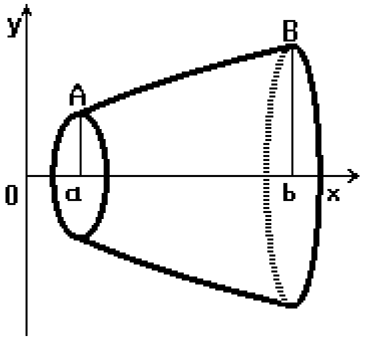
Kai $a = b = R$, turime atskirąjį elipsės atvejį – apskritimą ir $e = 0$. Šiuo atveju $L = 4R\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\pi R$. Atvejį $e = 1$ atitinka parametras $b = 0$ ir vietoj elipsės gausime abscisių ašies atkarpą $[-a, a]$. Paprastai gautas integralas neišreiškiamas elementariosiomis funkcijomis. Jis žymimas

$$E(e, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}\, dt$$

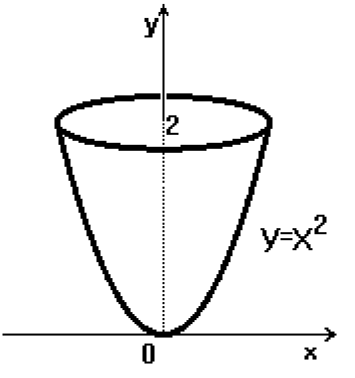
ir yra vadinamas *antrojo tipo elipsiniu integralu.*

10.3. Sukinio tūris

Pavaizduotas 10.3.1 paveiksle kūnas gautas, sukant kreivinę trapeciją $aABb$ apie abscisių (Ox) ašį. Suskaidome



10.3.1 pav.



10.3.2 pav.

atkarpą $[a, b]$ į n dalių $[x_{i-1}, x_i]$. Tada visas kūnas bus suskaidytas į n dalių, kurių tūrius apytiksliai pakeiskime cilindrų tūriais $V_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Čia $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – laisvai parenkami taškai, $f(\xi_i)$ – i-tojo cilindro pagrindo spindulys, Δx_i – cilindro aukštinė. Gauname integralinę sumą

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

ir skaičiuojame ribą, kai skersmuo $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i \to 0$. Taigi gauname formulę sukinio tūriui skaičiuoti:

$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx}$$

Tarkime, kad kreivė $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ apibrėžta parametrinėmis lygtimis: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Tada $dx = \varphi'(t)\,dt$ ir

$$\boxed{V = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt}$$

10.3.1 pavyzdys. Apskaičiuokime rutulio su spinduliu R tūrį.

Sprendimas

Rutulį su centru koordinačių pradžioje galime gauti sukdami pusapskritimį $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$ apie abscisių ašį. Turime

$$V = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx =$$
$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi \left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Atsakymas. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

10.3.2 pavyzdys. Apskaičiuokime 10.3.2 paveiksle pavaizduoto *sukimosi paraboloido* tūrį.

Sprendimas

Pastebėkime, kad kreivė $y = x^2$, $x \in [0, \sqrt{2}]$ sukama apie ordinačių (Oy) ašį. Todėl reikia pakeisti vietomis formulės kintamuosius y ir x. Taigi $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, 2]$ ir

$$V = \pi \int\limits_{0}^{2} x^2(y)\,dy = \pi \int\limits_{0}^{2} y\,dy = \pi \frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{2} = 2\pi.$$

Atsakymas. 2π.

10.4. Kiti taikymai

Sukimosi paviršiaus, kai kreivė $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ plotas S apskaičiuojamas pagal formulę

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx}$$

Kai kreivė išreikšta parametrinėmis lygtimis

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

taikome formulę

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt}$$

10.4.1 pavyzdys. Raskime sferos (rutulio paviršiaus) plotą.

Sprendimas

$$S = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R \int\limits_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

Atsakymas. $4\pi R^2$.

Paminėkime dar du[38] apibrėžtinio integralo taikymo pavyzdžius. Kintamosios jėgos $F(x)$ darbas A, kai ji veikia materialųjį tašką, judantį atkarpoje $[a, b]$, apskaičiuojamas taip:

$$A = \int\limits_{a}^{b} F(x)\, dx.$$

Nevienalyčio strypo, kurio ilginis tankis išreiškiamas funkcija $\rho(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, masė m apskaičiuojama pagal formulę

$$m = \int\limits_{a}^{b} \rho(x)\, dx.$$

10.5. Integralų taikymas ekonomikoje

Gamybos apimtis

Tarkime, kad funkcija $f(t)$ reiškia vidutinį gaminamos produkcijos kiekį laiko momentu t. Tada per trumpą laikotarpį Δt pagaminama produkcijos $f(\tilde{t})\,\Delta t$, čia $\tilde{t} \in (t, t + \Delta t)$. Per laikotarpį $t \in [a, b]$ bus pagaminta produkcijos

$$Q = \int_{a}^{b} f(t)\, dt$$

sąlyginių vienetų [s.v.].

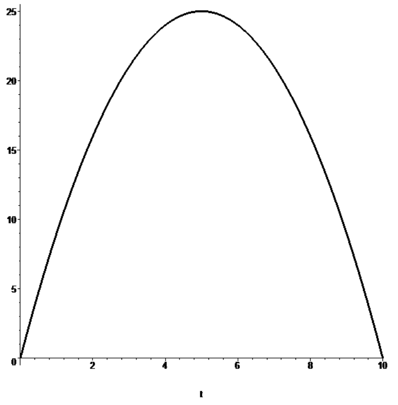
[38]Integralo taikymo pavyzdžių mechanikoje (ir kituose fizikos skyriuose) yra daug: statinių ir inercijos momentų skaičiavimas, svorio centrų koordinačių radimas ir kiti.

10.5.1 pavyzdys. Reikia rasti pagamintos per 8 val. produkcijos kiekį, jei darbo našumas aprašomas funkcija $f(t) = 10t - t^2$, $t \in [0, 10]$ (10.5.3 pav.).

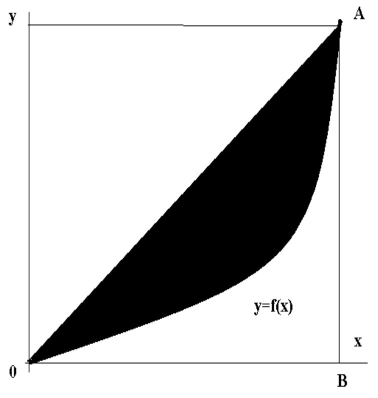
Sprendimas
Apskaičiuokime per 8 val. gaminamos produkcijos kiekį:

$$Q = \int_0^8 f(t)\,dt = \int_0^8 \left(10t - t^2\right)\,dt = \left(\frac{10t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^8 = 5 \cdot 8^2 - \frac{8^3}{3} - 0 - 0$$
$$= 64\left(5 - \frac{8}{3}\right) = 64\,\frac{15-8}{3} = \frac{64 \cdot 7}{3} = \frac{448}{3} = 149.33[s.v.]$$

Atsakymas. 149.33 [s.v.]



10.5.3 pav.



10.5.4 pav.

Džinio (Gini[39]) koeficientas

$y = f(x)$ – Lorenco[40] kreivė rodo, kokia gyventojų dalis (x) gauna atitinkamą pajamų dalį (y). *Pavyzdžiui*, jei $f(0.3) = 0.10$, tai 30% mažesnes pajamas gaunančiųjų gauna 10% visų pajamų.

Koeficientas (indeksas) G rodo pajamų netolygumo laipsnį ir apskaičiuojamas kaip užtušuotos dalies ir trikampio OAB plotų santykis (10.5.4 pav.):

$$G = \frac{\frac{1}{2} - \int\limits_0^1 f(x)\,dx}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

[39] Corrado Gini (1884–1965) – italų statistikas, demografas ir sociologas.
[40] M. D. Lorentz – Amerikos statistikas.

10.5.2 pavyzdys. Apskaičiuokime Džinio koeficientą, kai Lorenco kreivė yra $y = x^n$, $n > 1$.

Sprendimas

$$G = 1 - 2\int_0^1 x^n\,dx = 1 - \left.\frac{2x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{n-1}{n+1}.$$

10.6. Savarankiško darbo užduotys

2.11 užduotis

1. Apskaičiuokite apibrėžtinius integralus

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; **b)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4-x^2}$; **c)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4+x^2}$; **d)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx$; **f)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x\,dx$.

2.12 užduotis

1. Apskaičiuokite figūros, apribotos tiese $y = x$ ir parabole $y = 2 - x^2$, plotą.
2. Apskaičiuokite figūros, apribotos parabole $y = x^2 - 2x + 2$, jos liestine taške $(3, 5)$ ir teise $x = 0$, plotą.
3. Apskaičiuokite figūros, apribotos cikloide $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ ir tiese $y = a$, plotą.
4. Apskaičiuokite kreivės $y = \sqrt{x^3}$, $x = 0$, $x = 5$ lanko ilgį.
5. Raskite sukinio, gauto sukant parabolės $y^2 = 4x$ lanką $0 \leqslant x \leqslant 4$ apie abscisių ašį, tūrį.
6. Raskite sukinio, gauto sukant hiperbolę $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \leqslant x \leqslant 2a$ apie abscisių ašį, tūrį.

3 skyrius

Matematiniai paketai *Maple* ir *Maxima*

Raktiniai žodžiai: Diferencijavimas, integravimas, išskaidymas dauginamaisiais, išvestinė, ***Maple***, ***Maxima***, reiškinių prastinimas, ribų skaičiavimas, skleidimas laipsniais, sumavimas.
Literatūra: [Lip02] 81–119 p.; [Kry03] 61–77 p.; [Pek05] 183–250 p.; [Rum76] XIX skyrius, 330–350 p., XX skyrius 354–369 p.; [Kle03]; [Mis99]; [Dar01].

1. Paketas *Maple*

Maple – matematinė sistema, skirta ne tik matematikai, bet ir kitų sričių specialistams ir studentams. Mūsų tikslas – parodyti skaitytojui, kad ši priemonė gali būti taikoma kaip pagalbinė, bei išlaisvinti nuo daug darbo ir laiko reikalaujančių matematinių pertvarkymų. Tai leis daugiau dėmesio skirti studijuojamų metodų esmei ir nuodugnesnėms matematikos žinioms įgyti.
Maple piktograma su klevo lapeliu simbolizuoja Kanadą, nes ši sistema sukurta Kanados firmoje *Waterloo Maple Inc.* Tinklalapyje www.maplesoft.com galima rasti daug publikacijų apie ***Maple***.

Reiškiniai ***Maple*** sistemoje renkami darbo lange.

- Komandų įvedimo eilutė prasideda ženklu „>“, tačiau ***Maple12*** versijoje darbo lange matysite pasvirąjį brūkšnį, kuris nurodo vietą, kurioje rinksite tekstą.

- Kiekvienas reiškinys turi baigtis kabliataškiu arba dvitaškiu. Paskui reikia paspausti klavišą $\boxed{\text{Enter}}$ ir ***Maple*** rodo įvykdytos komandos rezultatą.

  – Jei baigiama dvitaškiu, komanda vykdoma, bet rezultatai nespausdinami.

  – Kai komanda užbaigiama kabliataškiu, paspaudę $\boxed{\text{Enter}}$ (arba ***Maple*** įrankių juostos mygtuką su šauktuku), iš karto gauname atsakymą arba pranešimą apie klaidą.

Apibrėžkime, *pavyzdžiui*, funkciją $f(x) = \dfrac{\ln(3x)}{x^2}$. ***Maple*** komandos ir jų vykdymo rezultatas:
$f(x) := ln(3 \cdot x)/x\hat{\ }2;$ $\boxed{\text{Enter}}$

$$f(x) := \frac{\ln(3x)}{x^2}$$

- Ženklas % reiškia paskutinį apskaičiuotą rezultatą.
- ***Maple*** sistemoje mažosios ir didžiosios raidės laikomos skirtingomis.
  - Jei komanda pradedama mažąja raide, sistema skaičiuoja ir rodo rezultatą iš karto.
  - Jei komanda pradedama didžiąja raide, sistema tik užrašo tai, ko ieškoma. Ši komanda gali būti taikoma uždavinio žingsniams parodyti.

Pavyzdžiui,
$Int\,(f(x), x) = int\,(f(x), x);$ $\boxed{\text{Enter}}$

$$\int \frac{\ln(3x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(3x)}{x} - \frac{1}{x}.$$

1.1. Pagrindinės komandos

- **Reikšmių įkėlimui į reiškinį** taikoma funkcija *subs()*. Funkcijoje *subs()* pirma nurodome norimus keitimus, toliau patį reiškinį, kurį norime apskaičiuoti, atlikę kintamųjų keitimą. *Pavyzdžiui*,
  $subs\left(x = 2,\ x^2 + x + 1\right);$ $\boxed{\text{Enter}}$
  $$7$$
  $subs\left(x = \sqrt[3]{r}, 3\,x\ln\left(x^3\right)\right);$ $\boxed{\text{Enter}}$
  $$3\sqrt[3]{r}\ln(r)$$
- **Matematinių reiškinių prastinimas** atliekamas taikant funkciją *simplify()*. ***Maple*** prastinimui taiko iš anksto nustatytas prastinimo procedūras, kurios gali netenkinti vartotojo. Tuomet yra galimybė skliausteliuose nurodyti prastinimo tipą:
  - *Radical* prastinimas su trupmeniniais laipsniais,
  - *Power* prastinimas su laipsniais,
  - *Trig* reiškinių prastinimas su trigonometrinėmis funkcijomis ir t.t.

Pavyzdžiui,

$$simplify\left(e^{a+\ln(be^c)}\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$be^{a+c}$$

$$simplify\left((\sin(x))^2+\ln(2\,x)+(\cos(x))^2\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$1+\ln(2)+\ln(x)$$

$$f\ :=\ (x+1)^{4/3}-x\sqrt[3]{x+1};\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$f\ :=\ (x+1)^{4/3}-x\sqrt[3]{x+1}$$

$$simplify\,(f, radical);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$\sqrt[3]{x+1}$$

$$simplify\left(e^{5\ \ln(x)+1}, power\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$x^5e^1$$

- **Išskaidymui** taikoma funkcija *factor()*, kuri išskaido daugianarį į daugiklius, atsižvelgdama į daugianario koeficientus. Jei koeficientai sveiki, tai ir daugiklių koeficientai bus sveiki, jei kompleksiniai, tai ir išskaidžius bus kompleksiniai.

$$factor\left(x^2+5\,x+6\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$(x+3)\,(x+2)$$

$$factor\left(x^3+6\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$x^3+6$$

$$factor\left(x^3+6, complex\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$(x+1.817120593)\,(x-0.9085602964+1.573672595\,i)$$

$$(x-0.9085602964-1.573672595\,i)$$

$$factor\left(y^4-2,\sqrt{2}\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$-\left(y^2+\sqrt{2}\right)\left(-y^2+\sqrt{2}\right)$$

- **Išdėstymui laipsniais** taikoma funkcija *expand()*. *Pavyzdžiui,*

$$expand\,((x+1)\,(x+2));\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$x^2+3\,x+2$$

$$expand\,(\sin(x+y));\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$

$$expand\left(e^{a+\ln(b)}\right);\ \boxed{\text{Enter}}$$

$$e^ab$$

1.2. Matematinės analizės uždavinių sprendimas

Su ***Maple*** paketu galime tirti funkcijas.

- **Funkcija** $f(x)$ gali būti apibrėžta taip: $f := x- > f\,(x)$. *Pavyzdžiui,* $ln(3 \cdot x)/x^2$; $\boxed{\text{Enter}}$

  $$x \mapsto \frac{\ln(3\,x)}{x^2}$$

  Šis paketas turi specialių funkcijų, – kaip ekstremumų ir trūkio taškų nustatymo, tolydumo tikrinimo funkcijos *maximize()*, *minimize()*, *extrema()* ir pan.

- *Pavyzdžiui*, funkcija *maximize()* randa **funkcijos maksimalias reikšmes**. Jei nurodomas intervalas, kuriame maksimalių reikšmių ketinama ieškoti, ieškoma tik tame intervale, jei ne visoje realiųjų skaičių aibėje.
  $maximize\left(x^2 - 3\,x + y^2 + 3\,y + 3, x = 2 \ldots 4, y = -4 \ldots -2\right);$ $\boxed{\text{Enter}}$

  $$11$$

  $maximize\left(x^2 - 3\,x + y^2 + 3\,y + 3, x = 2 \ldots 4, y = -4 \ldots -2, location\right);$ $\boxed{\text{Enter}}$

  $$11,\ \{[\{x = 4, y = -4\}, 11]\}$$

  location rašome tada, kai norime žinoti ne tik maksimalią reikšmę, bet ir vietą. Analogiškai veikia funkcija *minimize(). Pavyzdžiui,*
  $minimize\left(x^2 - 3\,x + y^2 + 3\,y + 3\right);$ $\boxed{\text{Enter}}$

  $$-3/2$$

- **Sumavimui** taikoma funkcija *sum()*.
  $sum\,(1/(x^2 + 1), x = -5..\,5);$ $\boxed{\text{Enter}}$

  $$\frac{3088}{1105}$$

  $evalf\,(\%);$ $\boxed{\text{Enter}}$

  $$2.794570136$$

- Funkcija *evalf()* taikoma apytikriam atsakymui gauti.

- Sandaugų skaičiavimą atlieka funkcija *product(). Pavyzdžiui,*
  $product(x/(x^2 + 1), x = 1..\,5);$ $\boxed{\text{Enter}}$

  $$\frac{3}{1105}$$

  $evalf\,(\%);$ $\boxed{\text{Enter}}$

  $$0.002714932127$$

- **Išvestinės** randamos su funkcija *diff()*. Įvedę funkciją, po kablelio galime nurodyti, pagal kurį kintamąjį skaičiuosime išvestinę. *Pavyzdžiui,* *diff*$(x^2 + 2 \cdot x + 1, x)$; $\boxed{\text{Enter}}$

$$2\,x + 2$$

diff(*ln*(*cos*(x)), x); $\boxed{\text{Enter}}$

$$-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

diff (*ln*(*cos*(x)), y); $\boxed{\text{Enter}}$

$$0$$

diff(*ln*(*sin*$(x^2+1)^2)^3, x)$, $\boxed{\text{Enter}}$

$$12\,\frac{\left(\ln\left(\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)^2\right)\right)^2\cos\left(x^2+1\right)x}{\sin\left(x^2+1\right)}$$

- **Ribų skaičiavimui** taikoma funkcija *limit()*. *Pavyzdžiui*, *limit*$((2 \cdot x^2 + x + 3)/(3 \cdot x^2 - x - 7), x =$ *infinity*); $\boxed{\text{Enter}}$

$$\frac{2}{3}$$

limit$(3/x^2, x = 0, right)$; $\boxed{\text{Enter}}$

$$\infty$$

- **Integravimą** atlieka funkcija *int()*. *Pavyzdžiui*, *int*(*sin*(x), x); $\boxed{\text{Enter}}$

$$-\cos(x)$$

int(*sin*(x), $x = 0..Pi$); $\boxed{\text{Enter}}$

$$2$$

  – **Kintamojo keitimo metodas**. Programa ***Maple*** turi komandų ir tarpiniams integravimo veiksmams atlikti. Tarkime, kad integruodami reiškinį $\int \frac{\sqrt[5]{\frac{x+b}{x-a}}\,x^3}{1+x}\,dx$ norime pakeisti integravimo kintamąjį $\frac{x+b}{x-a} = t^5$:
with(student):simplify(*changevar*$((x+b)/(x-a) = t^5$,
Int$(((x+b)/(x-a))^(1/5) * x^3/(1+x), x), t)$); $\boxed{\text{Enter}}$

$$-5(a+b)\int \frac{t^5(b+t^5a)^3}{(-1+t^5+b+t^5a)(-1+t^5)^4}\,dt.$$

Pastabos

1.2.1. Nors parametrų a, b reikšmės nenurodytos, ***Maple*** sėkmingai atlieka algebrinius pertvarkymus. Kartais tikslinga nurodyti papildomas sąlygas kintamiesiems. *Pavyzdžiui*, komanda *assume(a>0)* nurodo, kad parametro reikšmės gali būti tik teigiamos.

1.2.2. Komanda *with(student)* nurodo ***Maple*** paketą *student*, kuriame sistema ieško komandos *changevar*.

– **Integravimas dalimis**. Tarpiniams veiksmams atlikti taikoma kita dalinio integravimo komanda:
$intparts(Int(exp(a \cdot x) \cdot sin(b \cdot x), x), sin(b \cdot x));$ Enter

$$\frac{\sin(xa)e^{(xa)}}{a} - \int \frac{\cos(xb)\ b\ e^{(xa)}}{a}\, dx.$$

Matome, kad nurodyta komandoje *intparts* funkcija $\sin(b * x)$ integravimo dalimis formulėje $\int udv = uv - \int vdu$ yra lygi u. Pabandykime integruoti $\int (ax+b)^n \sin(cx)dx$:
$int((a \cdot x + b)^n \ \cdot \sin(c \cdot x), x);$ Enter

$$\int (ax+b)^n \sin(cx)dx.$$

ir ***Maple*** tik pakartoja komandą. Taikome komandą *intparts*:
$with(student) : simplify(intparts(int((a \cdot x + b)\hat{}$
$n \cdot sin(c \cdot x), x), (a \cdot x + b)));$ Enter

$$\frac{-(xa+b)^n \cos cx + n \int (xa+b)^{n-1} \cos(cx)dx}{c}.$$

Kadangi šio reiškinio integralas turi jau vienetu žemesnį laipsnį, galime jį panašiai pertvarkydami gauti rekurenčiąją formulę integralui skaičiuoti: $I_n = M + N\ I_{n-2}$. Formulės koeficientai M, N priklauso nuo x, n, a, b, c. Ši formulė yra gremėzdiška ir čia nepateikiama. Pastebėkime, kad ***Maple*** turi daug priemonių matematiniams reiškiniams pertvarkyti[1].

[1]Be paminėtos komandos *simplify*, yra ir kitų panašių komandų: *collect*, *combine*, *expand*, *normal*, *subs* ir kt.

2. Paketas *Maxima*

Maxima – **nemokama** kompiuterinė algebros sistema, kuri gali buti taikoma vietoj ***Maple***, ***Mathematica*** ir pan. Tinklalapyje http://maxima.sourceforge.net galima rasti straipsnių ir knygų apie ***Maxima***.

Darbas paprastai ***Maxima*** pakete pradedamas, surenkant matematinį reiškinį įvedimo eilutėje. Tai gali būti bet koks matematinis reiškinys: skaičių darinys, funkcija, sudėtingas reiškinys, kurį norime suprastinti, apskaičiuoti ir pan. Lango apačioje galime rasti dažniausiai naudojamas komandas: *simplify()*, *factor()*, *expand()*, *solve()* ir t.t.

- Kai parašome komandą įvedimo eilutėje, spaudžiame Enter arba mygtuką, kuris yra įvedimo eilutės gale ir vadinasi *Enter command*. Iš karto gauname atsakymą arba pranešimą apie klaidą.
- Ženklas % reiškia paskutinį apskaičiuotą rezultatą.
- ***Maxima*** komandos rašomos iš mažosios raidės.
- Jei prieš komandą užrašome simbolį „'“ , sistema tik užrašo tai, ko ieškoma. Ši komanda gali būti taikoma uždavinio žingsniams parodyti.
  Pavyzdžiui,

```
(%i1) 'limit((x^2-4)/(x-2),x,2)=limit((x^2-4)/(x-2),x,2);
```

(%o1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

2.1. Pagrindinės komandos

- **Reikšmių įkėlimui į reiškinį** taikoma funkcija *subst()*. Funkcijoje *subst()* pirma nurodome norimus keitimus, tada po kablelio nurodome kintamąjį, kurį norime pakeisti, ir patį reiškinį, kuri norime apskaičiuoti, atlikę kintamųjų keitimą. *Pavyzdžiui*,

```
(%i1) subst(2,x,x^2+x+1);
```

(%o1) $$7$$

```
(%i2) subst(y,sin(x),sin(x)/sqrt(1-sin(x)));
```

(%o2) $$\frac{y}{\sqrt{1-y}}$$

- **Matematinių reiškinių prastinimas** atliekamas su funkcijomis *ratsimp()*, *trigsimp()* (reiškinių prastinimas su trigonometrinėmis funkcijomis). *Pavyzdžiui*,

```
(%i1) ratsimp(((x - 1)^(3/2) - (x + 1)*sqrt(x - 1))
/sqrt((x - 1)*(x + 1)) );
```

(%o1) $$-\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

```
(%i2) trigsimp((sin(x))^2+log(2*x)+(cos(x))^2);
```

(%o2) $$log\left(2\,x\right)+1$$

- **Išskaidymui** taikoma funkcija *factor()*, kuri išskaido daugianarį į daugiklius.

```
(%i1) factor(x^2+5*x+6);
```

(%o1) $$\left(x+2\right)\,\left(x+3\right)$$

- **Išdėstymui laipsniais** taikoma funkcija *expand()*. Jei norime išdėstyti laipsniais trigonometrinę funkciją, tuomet įvedimo eilutėje rašysime komandą *trigexpand()* arba įvedę reiškinį (kuri norime prastinti), paspausime mygtuką $\boxed{\text{Expand(tr)}}$. *Pavyzdžiui*,

```
(%i1) expand((x+1)*(x+2));
```

(%o1) $$x^2+3\,x+2$$

```
(%i2) trigexpand(sin(x+y));
```

(%o2) $$cos\left(x\right)\,sin\left(y\right)+sin\left(x\right)\,cos\left(y\right)$$

```
(%i3) ratexpand(%e^(a+log(b)));
```

(%o3) $$e^a\,b$$

2.2. Matematinės analizės uždavinių sprendimas

- **Sumavimui** taikoma funkcija *sum()*. *Pavyzdžiui*,

```
(%i1) sum(1/(1+x^2),x,-5,5);
```

(%o1) $$\frac{3088}{1105}$$

```
(%i2) float(%);
```

$$(\%o2) \qquad 2.794570135746606$$

- Funkcija *float()* taikoma **apytikriam atsakymui gauti**.
- **Sandaugų** skaičiavimą atlieka funkcija *product()*. *Pavyzdžiui,*

```
(%i1) product(x/(1+x^2),x,1,5);
```

$$(\%o1) \qquad \frac{3}{1105}$$

```
(%i2) float(%);
```

$$(\%o2) \qquad 0.0027149321266968$$

- **Ribų skaičiavimui** taikoma funkcija *limit()*. *Pavyzdžiui,*

```
(%i1) 'limit((1-cos(x))/x^2,x,0)=
limit((1-cos(x))/x^2,x,0);
```

$$(\%o1) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

```
(%i2) 'limit(x^4*log(x),x,0,plus)=
limit(x^4*log(x),x,0,plus);
```

$$(\%o2) \qquad \lim_{x\to 0+} x^4\, log\,(x) = 0$$

```
(%i3) 'limit((x^2-4)/(x-2),x,2)=
limit((x^2-4)/(x-2),x,2);
```

$$(\%o3) \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

```
(%i4) 'limit((x)/(sqrt(3-x)-sqrt(3+x)),x,0)=
limit((x)/(sqrt(3-x)-sqrt(3+x)),x,0);
```

$$(\%o4) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+3}} = -\sqrt{3}$$

- **Išvestinės** randamos su funkcija *diff()*. Įvedę funkciją, po kablelio galime nurodyti, pagal kurį kintamąjį skaičiuosime išvestinę. *Pavyzdžiui,*

```
(%i1) diff(x^2+2*x+1,x);
```

(%o1) $$2\,x+2$$

```
(%i2) diff(log(cos(x)),x);
```

(%o2) $$-\frac{sin\left(x\right)}{cos\left(x\right)}$$

```
(%i3) diff(log(cos(x)),y);
```

(%o3) $$0$$

```
(%i4) diff((log(sin(x^2+1))^2)^3,x);
```

(%o4) $$\frac{12\,x\,cos\left(x^2+1\right)\,log\left(sin\left(x^2+1\right)\right)^5}{sin\left(x^2+1\right)}$$

```
(%i5) diff(diff(diff(4*x^2+2*x,x),x),x);
```

(%o5) $$0$$

```
(%i6) 'diff(4*x^2+2*x,x,3)=diff(4*x^2+2*x,x,3);
```

(%o6) $$\frac{d^3}{d\,x^3}\,\left(4\,x^2+2\,x\right)=0$$

- **Integralą** skaičiuoja funkcija *integrate()*. *Pavyzdžiui*,

```
(%i1) 'integrate(2*x+1,x,1,4)=integrate(2*x+1,x,1,4);
```

(%o1) $$\int_{1}^{4}2\,x+1dx=18$$

  - **Tiesioginis integravimas**. Kad galėtume suintegruoti pointegrines funkcijas, taikysime pagrindines komandas: *expand()*, *trigsimp()*, *subst()*.

```
(%i4) 'integrate((1+sqrt(x))^2,x);
```

(%o4) $$\int\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx$$

```
(%i5) expand(%);
```

(%o5) $$\int x+2\sqrt{x}+1dx$$

```
(%i6) ev(%, nouns)+C;
```

(%o6) $$C+\frac{x^2}{2}+\frac{4\,x^{\frac{3}{2}}}{3}+x$$

```
(%i7) 'integrate((sqrt(x)+2*x^(2/3)-3*x^(6/7))
/(x^(5/4)),x);
```

(%o7) $$\int \frac{-3\,x^{\frac{6}{7}}+2\,x^{\frac{2}{3}}+\sqrt{x}}{x^{\frac{5}{4}}}dx$$

```
(%i8) expand(%);
```

(%o8) $$\int -\frac{3}{x^{\frac{11}{28}}}+\frac{2}{x^{\frac{7}{12}}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}dx$$

```
(%i9) ev(%, nouns)+C;
```

(%o9) $$C-\frac{84\,x^{\frac{17}{28}}}{17}+\frac{24\,x^{\frac{5}{12}}}{5}+4\,x^{\frac{1}{4}}$$

```
(%i10) 'integrate(tan(x)^2,x);
```

(%o10) $$\int tan\left(x\right)^2dx$$

```
(%i11) trigsimp(%);
```

(%o11) $$\int \frac{sin\left(x\right)^2}{cos\left(x\right)^2}dx$$

```
(%i12) subst(sin(x)^2=1-cos(x)^2,%);
```

(%o12) $$\int \frac{1-cos\left(x\right)^2}{cos\left(x\right)^2}dx$$

```
(%i13) expand(%);
```

(%o13) $$\int \frac{1}{cos\left(x\right)^2}-1dx$$

```
(%i14) ev(%, nouns)+C;
```

(%o14) $$C + tan\,(x) - x$$

– **Kintamojo keitimo metodas**. Programa ***Maxima*** turi komandų tarpiniams integravimo veiksmams atlikti. Tarkime, kad, skaičiuodami $\int \frac{x}{\sqrt{x-4}}$ norime pakeisti integravimo kintamąjį $\sqrt{x-4}$:

```
(%i1) I:'integrate(x/sqrt(x-4),x);
```

(%o1) $$\int \frac{x}{\sqrt{x-4}} dx$$

```
(%i2) keitinys:t=sqrt(x-4);
```

(%o2) $$t = \sqrt{x-4}$$

```
(%i3) changevar(I,keitinys,t,x);

Is  t  positive, negative, or zero? positive;
```

(%o3) $$\int 2\,t^2 + 8dt$$

Gautąjį rezultatą apskaičiuojame su funkcija *ev()*, po kablelio nurodome *nouns*, kai norime apskaičiuoti integralą aba išvestinę.

```
(%i4) ev(%, nouns);
```

(%o4) $$\frac{2\,t^3}{3} + 8\,t$$

```
(%i5) subst(keitinys,%)+C;
```

(%o5) $$C + \frac{2\,(x-4)^{\frac{3}{2}}}{3} + 8\,\sqrt{x-4}$$

Kiti pavyzdžiai:

```
(%i11) I_2:'integrate(cos(9*x-2),x);
```

(%o11) $$\int cos\,(9\,x-2)\,dx$$

```
(%i12) keit:t=9*x-2;
```

(%o12) $$t = 9\,x - 2$$

```
(%i13) changevar(I_2,keit,t,x);
```

(%o13) $$\frac{\int cos\left(t\right)dt}{9}$$

```
(%i14) ev(%, nouns);
```

(%o14) $$\frac{sin\left(t\right)}{9}$$

```
(%i15) I_3:'integrate(1/(2*x-1),x);
```

(%o15) $$\int \frac{1}{2\,x-1}dx$$

```
(%i16) keit:t=2*x-1;
```

(%o16) $$t=2\,x-1$$

```
(%i17) changevar(I_3,keit,t,x);
```

(%o17) $$\frac{\int \frac{1}{t}dt}{2}$$

```
(%i18) ev(%, nouns)+C;
```

(%o18) $$C+\frac{log\left(t\right)}{2}$$

```
(%i19) I_4:'integrate(1/(5*x-1)^3,x);
```

(%o19) $$\int \frac{1}{{\left(5\,x-1\right)}^{3}}dx$$

```
(%i20) keit:t=5*x-1;
```

(%o20) $$t=5\,x-1$$

```
(%i21) changevar(I_4,keit,t,x);
```

(%o21) $$\frac{\int \frac{1}{t^3}dt}{5}$$

```
(%i22) ev(%, nouns)+C;
```

(%o22) $$C-\frac{1}{10\,t^2}$$

```
(%i23) subst(keit,%);
```

(%o23) $$C - \frac{1}{10\,(5\,x-1)^2}$$

– **Racionaliųjų funkcijų integravimas**. Norėdami suintegruoti racionaliąją funkciją, pirmiausia turime išskaidyti pointegrinę funkciją paprasčiausiųjų trupmenų suma. Tam taikysime papildomas ***Maxima*** paketo funkcijas. *Pavyzdžiui*, reikia suintegruoti šią funkciją $\frac{3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}$:

```
(%i1) point_funk:((3*x^2+3*x-1)/(x^3+2*x^2+x+2));
```

(%o1) $$\frac{3\,x^2+3\,x-1}{x^3+2\,x^2+x+2}$$

```
(%i2) partfrac(point_funk,x);
```

(%o2) $$\frac{2\,x-1}{x^2+1} + \frac{1}{x+2}$$

```
(%i3) expand(%);
```

(%o3) $$\frac{2\,x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x+2}$$

```
(%i4) 'integrate(point_funk,x)=integrate(%,x)+C;
```

(%o4)
$$\int \frac{3\,x^2+3\,x-1}{x^3+2\,x^2+x+2}dx = C + log\left(x^2+1\right) + log\,(x+2) - atan\,(x)$$

Tarkime, kad duota racionalioji funkcija $\frac{x^4}{x^2+1}$ ir ją reikia suintegruoti. Tada veiksmų seka bus:

```
(%i5) point_funk:((x^4)/(x^2+1));
```

(%o5) $$\frac{x^4}{x^2+1}$$

```
(%i6) partfrac(point_funk,x);
```

(%o6) $$\frac{1}{x^2+1} + x^2 - 1$$

```
(%i7) 'integrate(point_funk,x)=integrate(%,x)+C;
```

(%o7) $$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = C + atan\,(x) + \frac{x^3}{3} - x$$

– **Apibrėžtinio** integralo apskaičiavimas. *Pavyzdžiui*,

```
(%i1) 'integrate(2*x+1,x,1,4)=integrate(2*x+1,x,1,4);
```

(%o1) $$\int_{1}^{4} 2\,x+1dx=18$$

```
(%i2) 'integrate(sin(2*x+1),x,0,%pi)=
integrate(sin(2*x+1),x,0,%pi);
```

(%o2) $$\int_{0}^{\pi} sin\left(2\,x+1\right)dx=0$$

3. Tiesinės algebros uždavinių sprendimas matematiniais paketais

Raktiniai žodžiai: ***Maple***, ***Maxima***, matrica, veiksmai su matricomis, determinantas, tiesinės lygčių sistemos, Kramerio formulės, atvirkštinės matricos metodas, Gauso metodas.
Literatūra: [Lip02] 81–119 p.; [Kry03] 61–77 p.; [Pek05] 183–250 p.; [Rum76] X skyrius, 128–140 p.

3.1. Veiksmai su matricomis

Visi susiję su matricomis ir jų pertvarkymais veiksmai realizuoti tiesinės algebros pakete ***linalg***, kurį privalome iškviesti, norėdami spręsti tiesinės algebros uždavinius. Atidarę ***Maple*** langą, paketą iškvečiame surinkdami komandą *with(linalg)*;. Tačiau kai kurios funkcijos, *pavyzdžiui*, *matrix()* ar *vector()*, yra ir standartinėje ***Maple*** bibliotekoje. Tuomet paketo iškviesti nereikia.
Tiesinės algebros pavyzdžiai atlikti su ***Maple*** paketo 12 versija.
Pagrindinės komandos:

- Matricos įvedimas

restart; with(linalg);
A := matrix([[1, 2, 0], [-1, 5, 3], [0, 1, 4]]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

- Matricos A **determinanto** apskaičiavimas

det(A);

$$25 \quad \textbf{(2)}$$

- **Prijungtinė matrica** $\tilde{A}^T$ apskaičiuojama:

'A^T' = adjoint(A);

$$A^T = \begin{bmatrix} 17 & -8 & 6 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

- **Atvirkštinė matrica** A^{-1} randama:

B := inverse(A);

$$\begin{bmatrix} \frac{17}{25} & -\frac{8}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} \\ \frac{-1}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

- Matricų A ir B **daugybą** galima apskaičiuoti taip:

*'A*B' = multiply(A, B)*;

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

tačiau galima užrašyti ir tokiu būdu $A\&*B$ (taip atskiriama nuo skaičių daugybos):
$'A * B' = evalm(A\& * B)$;

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

- Matricų A rangas

'rangas' = rank(A);

$$rangas = 3 \tag{7}$$

- **Matricų A ir B sudėtis**

'A + B' = evalm(A + B);

$$A + B = \begin{bmatrix} \frac{42}{25} & \frac{42}{25} & \frac{6}{25} \\ -\frac{21}{25} & \frac{129}{25} & \frac{72}{25} \\ \frac{-1}{25} & \frac{24}{25} & \frac{107}{25} \end{bmatrix} \tag{8}$$

- Matricos **transponavimas** A^T

'A^T' = transpose(A);

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

- Matricos **kėlimas laipsniu** A^n

'A^3' = evalm(A^3);

$$A^3 = \begin{bmatrix} -13 & 64 & 60 \\ -32 & 145 & 186 \\ -10 & 62 & 103 \end{bmatrix} \tag{10}$$

- Matricos A **daugyba iš skaičiaus** λ

$'2 * A'$ *= evalm(2 * A);*

$$2\,A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \tag{11}$$

- Matricos elemento su indeksais i ir j minoras gaunamas komanda *minor(A,i,j)*, *pavyzdžiui*,

'M'_{12} =minor(A, 1, 2);

$$M_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(12)}$$

3.1.1 pavyzdys. Duotos matricos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atlikite šiuos veiksmus: $|C|\,(AB) + 2E$.

Sprendimas

Pirmiausia nurodome tiesinės algebros paketą, kur realizuoti visi veiksmai su matricomis ir jų pertvarkymais:
with(linalg);
Dabar įvedame matricas:
A := matrix([[-1], [2], [5]]);

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

B := matrix([[4, 1, -2]]);

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

C := matrix([[-3, 3, -2, -1], [2, -1, -2, -1], [3, -3, 4, 0], [4, -3, 1, 0]]);

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

E := [[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]];

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

Atliekame veiksmus su matricomis:
*'ats' = evalm(det(C)*multiply(A, B)+2*E);*

$$ats = \begin{bmatrix} 30 & 7 & -14 \\ -56 & -12 & 28 \\ -140 & -35 & 72 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

Taip pat trumpai aptarsime matematinės sistemos ***Maxima*** (**nemokama sistema**) pagrindines funkcijas, taikomas sprendžiant įvairius tiesinės algebros uždavinius, t.y. *matrix()*, *invert()*, *adjoint()*, *determinant()*, *coefmatrix()* ir t.t.

Pagrindinės komandos:

- **Matricos įvedimas**

```
(%i1) A:matrix([1,2,0],[-1,5,3],[0,1,4]);
```

(%o1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matricos A **determinanto** apskaičiavimas

```
(%i2) determinant(A);
```

(%o2)
$$25$$

- **Prijungtinė matrica** $\tilde{A}^T$ apskaičiuojama:

```
(%i3) adjoint(A);
```

(%o3)
$$\begin{pmatrix} 17 & -8 & 6 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Atvirkštinė matrica** A^{-1} randama:

```
(%i4) B:invert(A);
```

(%o4)
$$\begin{pmatrix} \frac{17}{25} & -\frac{8}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} \\ -\frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

- **Matricos sudauginamos**:

```
(%i5) A.B;
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matricos **rango** radimas:

```
(%i1) A:matrix([3,2,-1,0],[4,0,0,1],[5,-3,7,1],[1,2,9,0]);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) rank(A);
```

(%o2) $$4$$

3.1.2 pavyzdys. Duotos matricos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atlikite šiuos veiksmus: $|C|\,(AB) + 2E$.

<u>Sprendimas</u>
Pirmiausia įvedame matricas:

```
(%i1) A:matrix( [-1], [2], [5]);
```

(%o1) $$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) B:matrix( [4,1,-2]);
```

(%o2) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
(%i3) C:matrix( [-3,3,-2,-1], [2,-1,-2,-1], [3,-3,4,0], [4,-3,1,0]);
```

(%o3) $$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i4) E:matrix( [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]);
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabar užrašome, kokius veiksmus turime atlikti su šiomis matricomis:

```
(%i5) ats=determinant(C).(A.B)+2*E;
```

(%o5) $$ats = \begin{pmatrix} 30 & 7 & -14 \\ -56 & -12 & 28 \\ -140 & -35 & 72 \end{pmatrix}$$

3.2. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas matematiniais paketais

Norėdami spręsti lygčių sistemas su ***Maple***, turime išsikviesti paketą *linalg*, kuriame yra labai daug įvairių matricų pertvarkymo funkcijų. Viena iš specialių funkcijų – *linsolve()*, kuri skirta tiesinių lygčių sistemų sprendimui. Ši komanda sprendžia matricine forma užrašytą lygtį $Ax = b$. Matrica A ir vektorius b perduodami šiai funkcijai kaip parametrai: *linsolve(A,b,r)*. Čia parametras r, jei jis įrašytas, gauna matricos A rango reikšmę. Komandos vykdymo rezultatas yra vektorius.

Pastaba

Sprendžiant tiesinių lygčių sistemą su funkcija *linsolve()*, vektoriaus b (laisvųjų narių stulpelio) elementų skaičius turi sutapti su matricos A stulpelių skaičiumi!

3.2.1 pavyzdys. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Sprendimas

a) Pirmiausia išspręsime tiesinių lygčių sistemą taikydami operatorių *linsolve()*.
Iškviečiame paketą *linalg()*
with(linalg):

Įvedame koeficientų matricą
A := matrix([[2, -1, 1], [1, -1, 2], [3, 0, -4]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

ir užrašome vektorių **b**, kuris sudarytas iš duotosios sistemos lygčių dešinėse lygybės pusėse esančių elementų:
b := vector([2, 1, 2]);

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Taikome funkciją *linsolve()* šios sistemos sprendiniui surasti:
linsolve(A, b, 'r');

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Norėdami sužinoti sistemos rangą, užrašome:
r;

$$3 \quad \textbf{(4)}$$

b) Sprendimas taikant atvirkštinės matricos metodą $X = A^{-1}B$:
with(linalg):
Įvedame koeficientų matricą
A := matrix([[2, -1, 1], [1, -1, 2], [3, 0, -4]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

ir vektorių b:
b := vector([2, 1, 2]);

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Apskaičiuojame matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}
a := inverse(A);

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 10 & -11 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Surandame sprendinį $X = A^{-1}B$, t. y. sudauginame gautą atvirkštinę matricą a su vektoriumi b:
$X := evalm(a\& * b);$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

c) sprendimas taikant Kramerio formules.
with(linalg):

Įvedame koeficientų matricą
A := matrix([[2, -1, 1], [1, -1, 2], [3, 0, -4]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Apskaičiuojame koeficientų matricos determinantą, priskirdami jam „vardą“ delta:
Δ := det(A);

$$1 \qquad \textbf{(2)}$$

Taikydami Kramerio formules apskaičiuosime determinantus $\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3$, kur atitinkamai j-ąjį stulpelį keičiame laisvųjų narių stulpeliu. Prieš apskaičiuodami $\Delta 1$ determinantą, ***Maple*** lange įvedame matricą $A1$, kuri sudaryta iš koeficientų matricos, pakeisdami pirmąjį stulpelį laisvųjų narių stulpeliu. Tuomet apskaičiuojame šios matricos determinantą, priskirdami „vardą“ $\Delta 1$.
A1 := matrix([[2, -1, 1], [1, -1, 2], [2, 0, -4]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

Δ1 := det(A1);

$$2 \qquad \textbf{(4)}$$

Analogiškai apskaičiuojame ir kitus determinatus $\Delta 2, \Delta 3$:
A2 := matrix([[2, 2, 1], [1, 1, 2], [3, 2, -4]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

Δ2 := det(A2);

$$3 \qquad \textbf{(6)}$$

Δ3 := det(matrix([[2, -1, 2], [1, -1, 1], [3, 0, 2]]));

$$1 \qquad \textbf{(7)}$$

Surandame atsakymą:
ats := [Δ1/Δ, Δ2/Δ, Δ3/Δ];

$$[2, 3, 1] \qquad \textbf{(8)}$$

d) sprendimas Gauso ir Žordano metodu.
with(linalg);
Įvedame koeficientų matricą
A := matrix([[2, -1, 1], [1, -1, 2], [3, 0, 4]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

ir laisvųjų narių stulpelį:
B := matrix([[2], [1], [2]]);

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Užrašome išplėstinę matricą; tai galime padaryti dviem būdais:
I būdas - taikydami funkciją *augment()*:
AB := augment(A, B);

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

II būdas - iškart įvesdami išplėstinę matricą:
AB := matrix([[2, -1, 1, 2], [1, -1, 2, 1], [3, 0, -4, 2]]);

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Pritaikę funkciją *gaussjord()*, gauname mtricą, iš kurios galime pasakyti duotosios tiesinių lygčių sistemos atsakymą:
GJ := gaussjord(AB);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Pateiksime tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdų ir su paketu ***Maxima***.

3.2.2 pavyzdys. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą Kramerio metodu:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 4, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -6 \end{cases}$$

Sprendimas

Įvedame kiekvieną sistemos lygtį atskirai, priskirdami atitinkamai pavadinimus $L1$ - pirmoji lygtis, $L2$ - antroji lygtis ir t.t.

```
(%i1) L1:2*x1-x2+x3+2*x4=5;
```

(%o1) $$2\,x4 + x3 - x2 + 2\,x1 = 5$$

```
(%i2) L2:x1+3*x2-x3+5*x4=4;
```

(%o2) $$5\,x4 - x3 + 3\,x2 + x1 = 4$$

```
(%i3) L3:5*x1+4*x2+3*x3=2;
```

(%o3) $$3\,x3 + 4\,x2 + 5\,x1 = 2$$

```
(%i4) L4:3*x1-3*x2-x3-6*x4=-6;
```

(%o4) $$-6\,x4 - x3 - 3\,x2 + 3\,x1 = -6$$

Suvedę duomenis, užrašome koeficientų matricą (sudaryta iš koeficientų prie $x1, x2, x3, x4$), priskirdami jai pavadinimą A:

```
(%i5) A:coefmatrix([L1,L2,L3,L4],[x1,x2,x3,x4]);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Dabar apskaičiuojame tiesinės lygčių sistemos determinantą:

```
(%i6) D:determinant(A);
```

(%o6) $$-441$$

Dabar užrašome matricas $D1, D2, D3, D4$, kuriose atitinkamai j-ąjį stulpelį pakeičiame laisvųjų narių stulpeliu. Pavyzdžiui, matrica $D1$ yra sudaryta iš koeficientų matricos, kurioje **pirmąjį** stulpelį keičiame laisvųjų narių stulpeliu, matrica $D2$ yra sudaryta iš koeficientų matricos, kurioje **antrąjį** stulpelį keičiame laisvųjų narių stulpeliu ir t.t.:

```
(%i7) D1:matrix([5,4,2,-6],[-1,3,4,-3],[1,-1,3,-1],[2,5,0,-6]);
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i8) D2:matrix([2,1,5,3],[5,4,2,-6],[1,-1,3,-1],[2,5,0,-6]);
```

(%o8) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) D3:matrix([2,1,5,3],[-1,3,4,-3],[5,4,2,-6],[2,5,0,-6]);
```

(%o9) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) D4:matrix([2,1,5,3],[-1,3,4,-3],[1,-1,3,-1],[5,4,2,-6]);
```

(%o10) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Užrašę matricas, apskaičiuojame jų determinantus:

```
(%i11) B1:determinant(D1);
```

(%o11) $$-147$$

```
(%i12) B2:determinant(D2);
```

(%o12) $$294$$

```
(%i13) B3:determinant(D3);
```

(%o13) $$-441$$

```
(%i14) B4:determinant(D4);
```

(%o14) $$-588$$

Pritaikę Kramerio formules, gauname tiesinių lygčių sistemos sprendinį:

```
(%i15) ats:[B1/D,B2/D,B3/D,B4/D];
```

(%o15) $$[\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}]$$

Pateiksime ir kitą šio uždavinio sprendimo būdą.

II būdas

Sprendimas
Pirmiausia (kaip ir ankstesniame pavyzdyje) suvedame tiesinių lygčių sistemos lygtis, priskirdami joms pavadinimus $L1, L2, L3, L4$

```
(%i1) L1:2*x1-x2+x3+2*x4=5;
```

(%o1) $$2\,x4+x3-x2+2\,x1=5$$

```
(%i2) L2:x1+3*x2-x3+5*x4=4;
```

(%o2) $$5\,x4-x3+3\,x2+x1=4$$

```
(%i3) L3:5*x1+4*x2+3*x3=2;
```

(%o3) $$3\,x3+4\,x2+5\,x1=2$$

```
(%i4) L4:3*x1-3*x2-x3-6*x4=-6;
```

(%o4) $$-6\,x4-x3-3\,x2+3\,x1=-6$$

Užrašome koeficientų matricą

```
(%i5) A:coefmatrix([L1,L2,L3,L4],[x1,x2,x3,x4]);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

ir laisvųjų narių stulpelį, nurodydami, kad jis yra sudarytas iš skaičių, kurie yra duotos sistemos lygtyse, dešinėje lygybės pusėje:

```
(%i6) B:[rhs(L1),rhs(L2),rhs(L3),rhs(L4)];
```

(%o6) $$[5, 4, 2, -6]$$

Apskaičiuojame koeficientų matricos determinantą.

```
(%i7) D:determinant(A);
```

(%o7) $$-441$$

Pirmiausia nurodome, kaip keičiasi elementai matricose $T1$,$T2$,$T3$,$T4$ (pavyzdžiui, matrica $T1$ sudaryta iš koeficientų matricos, kurioje pirmas stulpelis keičiamas laisvųjų narių stulpeliu), tada užrašome šias matricas ir apskaičiuojame jų determinatus.

```
(%i8) T1[i,j]:=if j=1 then B[i] else A[i,j];
```

(%o8) $$T1_{i,j} := if j = 1 \text{ then} B_i \text{ else } A_{i,j}$$

```
(%i9) T2[i,j]:=if j=2 then B[i] else A[i,j];
```

(%o9) $$T2_{i,j} := if j = 2 \text{ then} B_i \text{ else } A_{i,j}$$

```
(%i10) T3[i,j]:=if j=3 then B[i] else A[i,j];
```

(%o10) $$T3_{i,j} := if j = 3 \text{ then} B_i \text{ else } A_{i,j}$$

```
(%i11) T4[i,j]:=if j=4 then B[i] else A[i,j];
```

(%o11) $$T4_{i,j} := if j = 4 \text{ then} B_i \text{ else} A_{i,j}$$

Sudarome atitinkamas matricas ir apskaičiuojame jų determinantus:

```
(%i12) genmatrix(T1,4,4);
```

(%o12) $$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -6 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i13) D1:determinant(%);
```

(%o13) $$-147$$

```
(%i14) genmatrix(T2,4,4);
```

(%o14) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i15) D2:determinant(%);
```

(%o15) $$294$$

```
(%i16) genmatrix(T3,4,4);
```

(%o16) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i17) D3:determinant(%);
```

(%o17) $$-441$$

```
(%i18) genmatrix(T4,4,4);
```

(%o18) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

```
(%i19) D4:determinant(%);
```

(%o19) $$-588$$

Dabar remdamiesi Kramerio formulėmis gauname atsakymą:

```
(%i20) ats:[D1/D,D2/D,D3/D,D4/D];
```

(%o20) $$[\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,\frac{4}{3}]$$

Kitas tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdas – sprendimas atvirkštinės matricos metodu, t. y. – $X = A^{-1}B$. Šio metodo sprendimo algoritmą pailiustruosime konkrečiu pavyzdžiu.

3.2.3 pavyzdys. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Sprendimas

Pirmiausia įvedame duotosios sistemos lygtis, priskirdami atitinkamai pavadinimus $L1$ - pirmoji lygtis, $L2$ - antroji lygtis, $L3$ - trečioji lygtis.

```
(%i1) L1:2*x1-x2+x3=2;
```

(%o1) $$x3 - x2 + 2\,x1 = 2$$

```
(%i2) L2:x1-x2+2*x3=1;
```

(%o2) $$2\,x3 - x2 + x1 = 1$$

```
(%i3) L3:3*x1-4*x3=2;
```

(%o3) $$3\,x1 - 4\,x3 = 2$$

Užrašome koeficientų matricą (sudaryta iš koeficientų prie $x1, x2, x3$), priskirdami jai pavadinimą A ir

```
(%i4) A:coefmatrix([L1,L2,L3],[x1,x2,x3]);
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

laisvųjų narių stulpelį, nurodydami, kad jis yra sudarytas iš skaičių, kurie yra duotos sistemos lygtyse, dešinėje lygybės pusėje:

```
(%i5) B:[rhs(L1),rhs(L2),rhs(L3)];
```

$$\text{(\%o5)} \qquad [2, 1, 2]$$

Apskaičiuojame koeficientų matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}:

```
(%i6) a:invert(A);
```

$$\text{(\%o6)} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 10 & -11 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Norėdami surasti duotosios tiesinių lygčių sistemos sprendinį, sudauginame gautąją atvirkštinę matricą a su laisvųjų narių stulpeliu B:

```
(%i7) ats:a.B;
```

$$\text{(\%o7)} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2.4 pavyzdys. Išspręskite tiesinę lygčių sistemą Gauso metodu:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 4, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -6 \end{cases}$$

Sprendimas
Pirmiausia suvedame duotąją tiesinių lygčių sistemą:

```
(%i1) L:[2*x1-x2+x3+2*x4=5,x1+3*x2-x3+5*x4=4,
5*x1+4*x2+3*x3=2,3*x1-3*x2-x3-6*x4=-6];
```

(%o1)
$$[2\,x4+x3-x2+2\,x1=5, 5\,x4-x3+3\,x2+x1=4, 3\,x3+4\,x2+5\,x1=2, -6\,x4-x3-3\,x2+3\,x1=-6]$$

Užrašome išplėstinę matricą:

```
(%i2) AB:augcoefmatrix(L,[x1,x2,x3,x4]);
```

$$\text{(\%o2)} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Užrašome išplėstinę matricą trapeciniu pavidalu:

```
(%i3) Gm:echelon(AB);
```

(%o3)
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{11} & \frac{25}{11} & -\frac{18}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{87}{23} & \frac{93}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Gautoji matrica yra ekvivalenti lygčių sistemai. Norėdami užrašyti šią lygčių sistemą, pirmiausia gautąją matricą padauginame iš vektoriaus stulpelio, kurį sudaro sistemos nežinomieji $x1, x2, x3, x4$ ir 1.

```
(%i4) S:Gm.[x1,x2,x3,x4,1];
```

(%o4)
$$\begin{pmatrix} \frac{3\,x3}{5} + \frac{4\,x2}{5} + x1 - \frac{2}{5} \\ \frac{25\,x4}{11} - \frac{8\,x3}{11} + x2 - \frac{18}{11} \\ -\frac{87\,x4}{23} + x3 + \frac{93}{23} \\ x4 - \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Dabar užrašome lygčių sistemą, kurią sudaro gautos matricos eilutės, prilygintos nuliui:

```
(%i5) Lyg_sist:[S[1,1]=0,S[2,1]=0,S[3,1]=0,S[4,1]=0];
```

(%o5)
$$[\frac{3\,x3}{5}+\frac{4\,x2}{5}+x1-\frac{2}{5}=0, \frac{25\,x4}{11}-\frac{8\,x3}{11}+x2-\frac{18}{11}=0, -\frac{87\,x4}{23}+x3+\frac{93}{23}=0, x4-\frac{4}{3}=0]$$

Išsprendžiame lygčių sistemą su funkcija *solve()*:

```
(%i6) solve(Lyg_sist,[x1,x2,x3,x4]);
```

(%o6)
$$[[x1=\frac{1}{3}, x2=-\frac{2}{3}, x3=1, x4=\frac{4}{3}]]$$

3.2.5 pavyzdys. Išspręskite tiesinę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 4, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -6 \end{cases}$$

Sprendimas

Įrašome lygčių sistemą:

```
(%i1) L:[2*x1-x2+x3+2*x4=5,x1+3*x2-x3+5*x4=4,
5*x1+4*x2+3*x3=2,3*x1-3*x2-x3-6*x4=-6];
```

(%o1)
$[2\,x4+x3-x2+2\,x1=5, 5\,x4-x3+3\,x2+x1=4, 3\,x3+4\,x2+5\,x1=2, -6\,x4-x3-3\,x2+3\,x1=-6]$

Kadangi sąlygoje nenurodyta, kuriuo metodu reikia išspręsti tiesinių lygčių sistemą, tai sprendinį surasime taikydami funkciją *solve()*:

```
(%i2) solve(L,[x1,x2,x3,x4]);
```

(%o2) $$[[x1=\frac{1}{3}, x2=-\frac{2}{3}, x3=1, x4=\frac{4}{3}]]$$

Užduočių atsakymai

Testų atsakymai

1.1 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
atsakymai	1	2	2	1	4

1.2 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
atsakymai	2	1	3	6	5	4	4	3

1.3 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
atsakymai	5	3	4	1	3	3	2

1.4 testas

klausimai	**1**
atsakymai	0

1.5 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
atsakymai	3	5	1	3	1	2	1	2	5	3	5	2	1

1.6 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	4	2	2	3

1.7 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
atsakymai	3	3	2	3	1	5	5	3	6	4

1.8 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
atsakymai	6	7	7	5	5

2.1 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**
atsakymai	3	2	3

2.2 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
atsakymai	8	2	1	1	5

2.3 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	8	5	2	8

2.4 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	4	2	7	6

2.5 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
atsakymai	8	5	7	4	5	4	8	2	6	2	5

2.6 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
atsakymai	6	8	5	8	5

2.7 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**
atsakymai	1	5	5

2.8 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
atsakymai	4	1	4	1	2	1	6	3

2.9 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	7	7	7	8

2.10 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	6	5	1	3

2.11 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**
atsakymai	4	3	8

2.12 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	2	1	6	1

2.13 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
atsakymai	1	1	2	6	3

2.14 testas

klausimai	**1**	**2**
atsakymai	3	2

2.15 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**
atsakymai	5	3	2

2.16 testas

klausimai	**1**	**2**
atsakymai	5	4

2.17 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	5	1	4	5

2.18 testas

klausimai	**1**	**2**	**3**	**4**
atsakymai	2	5	1	3

2.19 testas

klausimai	**1**	**2**
atsakymai	3	1

2.20 testas

klausimai	**1**	**2**
atsakymai	5	2

Savarankiško darbo užduočių atsakymai

1.1

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2

a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 8 & -3 \\ -3 & 2 & -4 & 1 \\ 7 & -7 & -16 & 7 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 23 & 14 & -37 & 11 \\ 14 & -9 & 15 & -8 \\ -28 & 25 & 69 & -35 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} -13 & -8 & 21 & -5 \\ -8 & 5 & -7 & 6 \\ 14 & -11 & -37 & 21 \end{pmatrix}$, **d)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 19 \\ -2 & -1 & 23 & 4 \\ -28 & 49 & 29 & 21 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} -27 & -17 & 44 & -5 \\ -17 & 10 & -8 & 19 \\ 21 & -9 & -68 & 49 \end{pmatrix}$.

1.3.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ -17 \end{pmatrix}$, **f)** $\begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, **g)** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, **h)** (4), **i)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1.5.

a) $AB \neq BA$, **b)** $AB = BA$.

1.6.
a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} -17 & -9 & 1 \\ -18 & -24 & -4 \\ -3 & 6 & -35 \end{pmatrix}$.

1.7.
a) -10, **b)** 0, **c)** 0, **d)** 5, **e)** 0.

1.8.
a) $-2;\ 0$, **b)** $-3;\ 6$, **c)** $-2;\ -1$.

1.9.
a) $-4 \leq x \leq 5$, **b)** $x \leq 4,\ x \geq 5$, **c)** $-2 \leq x \leq 4$.

1.10.
a) -6, **b)** 15, **c)** -20, **d)** 364.

1.11.
1.
a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{11}{42} & \frac{5}{42} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{42} & \frac{11}{42} \end{pmatrix}$,
d) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, **e)** $\begin{pmatrix} -0,1 & -0,3 & 0,5 \\ 0,8 & 1,4 & -1 \\ 0,3 & 0,9 & -0,5 \end{pmatrix}$, **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.12.
a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}$, **b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **c)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.13.
a) pirmos rūšies produkcijos reikia pagaminti 180 vienetų, o antros rūšies – 260 vienetų, **b)** ekonominė sistema neproduktyvi, **c)** $X = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$.

1.14.
a) taip. **b)** ne.

1.15.
$X = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix}$.

1.16.
a) $(2,\ 1)$, **b)** $(1,\ -2,\ 3)$, **c)** $(-2,\ 2,\ 4)$, **d)** $(1,\ 0,\ -2)$, **e)** $(2,\ -1,\ 1)$, **f)** $(-1,\ 2,\ 2)$, **g)** Nėra sprendinių, **h)** $(1,\ -3,\ -1)$, **i)** $(-2,\ -3,\ -3)$.

1.17.
a) $(-1,\ 1,\ -1)$, **b)** $(-3,\ -3,\ -2)$.

1.18.
a) $rang\ (A) = 2$, **b)** $rang\ (A) = 3$, $rang\ (A) = 2$.

1.19.
a) $\{(3-2t;\ 5t-4;\ 2-t;\ t)\,,\ \ t \in R\}$, **b)** sprendinių nėra, **c)** $(1;\ 1;\ 1;\ 0)$, **d)** $(1;0;0;1)$, **e)** $\left\{\left(2t+2;\ \frac{4}{5}-\frac{t}{5};\ \frac{11}{5}+\frac{16}{5}t;\ t\right),\ t \in R\right\}$, **f)** $\left\{\left(\frac{1}{8}t-\frac{1}{2}z+\frac{11}{8};\ \frac{11}{8}t-\frac{1}{2}z+\frac{1}{8};\ t;\ z\right),\ \ \mathrm{t,z} \in R\right\}$, **g)** sprendinių nėra, **h)** $\{(3-2t;\ 5t-4;\ 2-t;\ t)\,,\ t \in R\}$, **i)** sprendinių nėra, **j)** sprendinių nėra, **k)** sprendinių nėra, **l)** $\left\{\left(\dfrac{7-3z}{4};\dfrac{5-z}{4};\ z\right),\ \ z \in R\right\}$.

1.20.
a) $(-5;\ 0)$, $(2;\ 6)$, $(6;\ 5)$, $(8;\ 0)$, **b)** $(6;8)$, $(10;6)$, $(11;2)$.

1.21.
a) -8, kai $x=-1$, $y=-2$, **b)** 4, kai $x=0$, $y=4$, **c)** -4, kai $x=0$, $y=2$, **d)** 26, kai $x=6$, $y=4$, **e)** 6, kai $x_1=0$, $x_2=3$ arba $x_1=2$, $x_2=0$, **f)** 15, kai $x_1=5$, $x_2=0$, **g)** 0, kai $x_1=0$, $x_2=0$, **h)** -4, kai $x_1=-2$, $x_2=0$.

2.1.
a) $-\frac{2}{9}$; **b)** 36; **c)** $-\frac{3}{2}$; **d)** ∞; **e)** 0; **f)** 1; **g)** $\frac{1}{3}$.

2.2.
a) $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{38}{45}$; **c)** $\frac{3}{2}$; **d)** - 2; **e)** 3; **f)** 3; **g)** $\frac{1}{2}$; **h)** $\frac{15}{11}$; **i)** 1; **j)** $\frac{1}{9}$; **k)** $\frac{4}{3}$; **l)** $e^{\frac{1}{128}}$.

2.3.
a) e^3; **b)** e^2; **c)** e^{-1}; **d)** $\frac{5}{6}$; **e)** $\frac{5}{6}$; **f)** $\frac{9}{4}$; **g)** $\frac{1}{18}$; **h)** $e^{-\frac{2}{9}}$.

2.4.
a) $+\infty$; **b)** $-\infty$; **c)** $\frac{1}{4}$; **d)** $+\infty$; **e)** - 1; **f)** $\frac{2}{3}$; **g)** $-\infty$.

2.5.
1. $1-\cos x$; **2.** $\sin x$; **3.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x$; **4.** $\frac{(2x+3)^6}{12}$; **5.** $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2-x)^4}$; **6.** $\frac{1}{3}$; **7.** $F(1)=\sqrt{3}$; **8.** $\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$; **9.** $\frac{3}{4}\arcsin 2x + C$; **10.** $-\frac{2}{3}\sqrt{7-3x}+C$.

2.6.
1. $\frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$; **2.** $4\sqrt[4]{x} + \frac{24\sqrt[12]{x^5}}{5} - \frac{84\sqrt[28]{x^{17}}}{17} + C$;
3. $3\,\mathrm{arctg}\ x - 7\arcsin\ x + C$; **4.** $\frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$; **5.** $\mathrm{tg}\,x - x + C$.

2.7.
1. $-\sqrt{1-x^2} + C$; **2.** $-2\sqrt{1-x} + C$; **3.** $\frac{3\cdot\sqrt[3]{(3+x^2)^4}}{8} + C$;
4. $\arcsin(\ln x) + C$; **5.** $-\frac{1}{4}\ln|1 - 4\ln x| + C$; **6.** $-\frac{3\cdot\sqrt[3]{(\cos x - 5)^2}}{2} + C$.

2.8.
1. $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$; **2.** $\frac{1}{27}e^{3x}(9x^2 - 6x + 2) + C$;
3. $\frac{1}{3}\left(x^3\arcsin x + \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right) + C$; **4.** $\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C$; **5**. $(x-1)\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\cos x| + C$.

2.9.
1. $\frac{x^3}{3} - x + \mathrm{arctg}\,x + C$; **2.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C$; **3.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right| + C$;
4. $\frac{3}{7}\ln|x-1| + \frac{4}{7}\ln|x+6| + C$; **5.** $2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

2.10.
1. $3\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{6}} - x\dfrac{\sqrt{6-x^2}}{2} + C$; **2.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\arcsin\dfrac{x\sqrt{3}}{5} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{5-3x^2} + C$;
3. $\dfrac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$; **4.** $\dfrac{u^2}{2} - \dfrac{2\sqrt{u^3}}{3} + u + C$; **5.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{2}} + C$;
6. $\dfrac{4x}{8} - \dfrac{\cos 10x}{20} + C$; **7.** $\dfrac{x}{16} - \dfrac{\sin 4x}{64} + \dfrac{\sin^3 2x}{48} + C$; **8.** $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right| + C$.

2.11.
1. $\dfrac{\pi}{6}$; **2.** $\dfrac{\ln 3}{4}$; **3.** $\dfrac{\pi}{8}$; **4.** $\dfrac{1}{2}$; **5.** $\dfrac{\sqrt{3}}{16} + \dfrac{\pi}{12}$.

2.12. 1. $\dfrac{9}{2}$; **2.** 9; **3.** $a^2\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$; **4.** $\dfrac{335}{27}$; **5.** 32π; **6.** $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$.

Literatūra

[Apy01] Apynis Antanas; Stankus Eugenijus. *Matematika. Vadovėlis su taikymo ekonomikoje pavyzdžiais.* Vilnius: TEV, 2001. 357 p. ISBN 9955-491-08-6.

[Būd08] Būda Vytautas. *Matematiniai ekonominės analizės pagrindai.* TEV, Vilnius, 2008. 330 p. ISBN 978-9955-879-34-3.

[Dar01] Darbo su sistema Maple V pagrindai. *Matematinės analizės praktikumas.* Šiauliai: Šiaulių universiteto leidykla, 2001.

[Kle03] Kleiza Jonas. *Matematinis paketas MAPLE.* Vilnius: Technika, 2003.

[Kry03] Krylovas Aleksandras. *Integralinis skaičiavimas pasitelkiant MAPLE.* Vilnius: Technika, 2003. 115 p. ISBN 9986-05-633-0.

[Lip02] Lipeikienė Joana. *Matematika su kompiuteriu: kompiuterinės matematinės sistemos DERIVE, MAPLE, MATLAB.* Vilnius: Matematikos ir informatikos institutas, 2002. 120 p. ISBN 9986-680-23-9.

[Mis99] Misevičius Gintautas; Pincevičius Albertas; Rakauskas Rimantas Jonas; Eidukevičius Rimantas. *Aukštoji matematika. Vadovėlis ir pratybos su kompiuteriu.* Vilnius: TEV, 1999. 469 p. ISBN 9986-546-71-0.

[Pek00] Pekarskas Vidmantas. *Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas.* Kaunas: Technologija, 2000. 386 p. ISBN 9986-13-416-1.

[Pek05] Pekarskas Vidmantas. *Trumpas matematikos kursas.* Kaunas: Technologija, 2005. 463 p. ISBN 9955-09-858-9.

[Puš01] Puškorius Stasys. *Matematiniai metodai vadyboje.* Vilnius: TEV, 2001. 386 p. ISBN 9986-546-99-0.

[Rum76] Rumšas Petras. *Trumpas aukštosios matematikos kursas.* Vilnius: Mokslas, 1976. 560 p.

[Stu08] Stungurienė Stanislava. *Verslo matematika.* Vilnius: TEV, 2008. 198 p. ISBN 978-9955879-04-6.

[Tho05] Thomas George B.; Weir Maurice D.; Hass Joel R.; Giordano Frank R. *Thomas' Calculus 11/E.* Pearson, 2005. 1380 p. ISBN-10:0321185587.

[Urb05] Urban Paul; Owen John; Martin David; Haese Robert; Haese Sandra; Bruce Mark. *Mathematics for the International Student: Mathematics HL: International Baccalaureate Diploma Programme.* Haese and Harris, Australia, 2005. 832 p. ISBN-10:876543450.

Rodyklė

Krylovas, Aleksandras

Kr242 Matematika studijuojantiems ekonomiką ir verslą : vadovėlis / Aleksandras Krylovas, Rima Kriauzienė ; Mykolo Romerio universitetas. – Vilnius : Registrų centras, 2015. – 336 p.

Bibliogr.: p. 315–316. – R-klė: p. 317–320

ISBN 978-9955-30-177-6 (elektroninis)
ISBN 978-9955-30-176-9 (spausdintinis)

UDK 51(075.8)

Aleksandras Krylovas, Rima Kriauzienė

MATEMATIKA STUDIJUOJANTIEMS
EKONOMIKĄ IR VERSLĄ

Redagavo Vilija Kruopienė
Parengė leidybai Rima Semenčiukienė, Algis Švedas
Viršelio dailininkė Jūratė Juozėnienė

SL 1613. 2015 09 15. 21 leidyb. apsk. l.
Tiražas 500 egz. Užsakymo Nr.

Išleido VĮ Registrų centro
Teisinės informacijos departamentas
Žirmūnų g. 68A, LT-09124 Vilnius
tel./faksas (8 5) 261 2806
www.teisineliteratura.lt, leidyba@registrucentras.lt

Spausdino UAB „Ciklonas“
J. Jasinskio g. 15, LT-01111 Vilnius

Kaina sutartinė